由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

编 者 的 话

为了便于学生在学习材料力学课程时能更深入地思考一些问题，我们尝试编写了这本思考题集。

一些材料力学教科书所给出的思考题，似乎可以分为两大类。一类主要是复习性的，例如，“材料力学的任务是什么？”“材料力学的研究对象是什么？”等等。另一类则不单纯是复习，而且带有一定的思考性。收入本书的673道题，基本上属于后一类（有个别题属于归纳、小结的性质）。当然，这些题目思考起来，其难易和繁简程度是不一样的。在选编题目时，我们首先是从工科大学本科生的学习内容出发，同时亦适当兼顾各类大专学生（包括电大、函授和各种成人、业余教育以及自学等）的需要。若干题目略为超出现行一般教科书内容的范围，以期扩大学生的视野，或为准备报考硕士研究生者复习参考。此外，有些题目，例如第十二章末尾的几道题，涉及到一些有趣的实际问题，但它们却未必有唯一的定量的答案。选入这些题目的目的，是让读者体会一下实际问题的复杂性和综合性，并尝试如何运用材料力学知识来处理这些问题。这或许有助于能力的锻炼和培养。在本书编写过程中，某些题目曾被用作学生智力竞赛的答辩题，并引起了同学们的兴趣。总之，本书不仅是学生学习材料力学时的一本参考读物，而且还可供教师在教学时参考。

对于较为困难或复杂，以及超出一般教科书内容范围的思考题，一般用星号“*”注明。书末还给出了194道题的答案或提示，以供参考。限于篇幅，并出于培养学生自学能力的考虑，在不少答案中只列出了参考文献。为了读者能方便找到有关资料，答案中仅介绍中文书刊，并以近期出版的为主（一本书写有两个年分者，依次表示第1、2版）。至于外国人名，凡《中国大百科全

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

书·力学》上有的，本书一律照着译出，其他则采用较为通行的译名。

清华大学范钦珊副教授审阅了书稿，并提出了许多宝贵的意见。国防科学技术大学陈荣锦教授提供了有关实验方面的十几道题目。在此谨向他们表示深切的谢意。

限于水平和时间，书中一定存在不少问题，甚至错误，欢迎读者指正。

编　者

1988年

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

目　录

编者的话……（Ⅰ）
第一章　绪论和基本概念……（1）
第二章　拉伸和压缩……（3）
第三章　剪切和扭转……（20）
第四章　应力状态和强度理论……（29）
第五章　平面图形的几何性质……（42）
第六章　弯曲……（48）
第一节　内力……（48）
第二节　应力……（58）
第三节　变形……（74）
第七章　组合变形……（89）
第八章　变形能法……（98）
第九章　超静定体系……（108）
第十章　压杆稳定和梁柱（纵横弯曲）……（119）
第十一章　动载和疲劳……（129）
第十二章　综合性问题和其他……（144）
答案和提示……（170）
答案和提示所引用的参考文献……（222）

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第一章　绪论和基本概念

1.1　如果我们作这样的概括：材料力学从宏观上研究构件（主要是杆件）在外力作用（和温度变化）下的变形和失效的规律，为合理设计提供有关的基础，那么，这里讲的变形和失效问题又可分为哪几个方面？所谓合理包含有什么主要的要求？

1.2　材料力学的研究对象与理论力学的研究对象有什么区别和联系？为什么会有这样的区别？

1.3　材料力学中对构件的材料有哪些基本假设？为什么要有这些假设？在什么情况下这些假设是符合或不符合实际情况的？

1.4　均匀性假设与各向同性假设的区别在哪里？均匀性假设实际上包含了连续性假设，对吗？

1.5　试列举五种以上不是各向同性的固体。

1.6　材料力学中为什么要引入“小变形”的限制条件？试举二、三例说明。

1.7　试列举几个可以简化为杆件的实际零、构件（最好是结合所学专业的）。

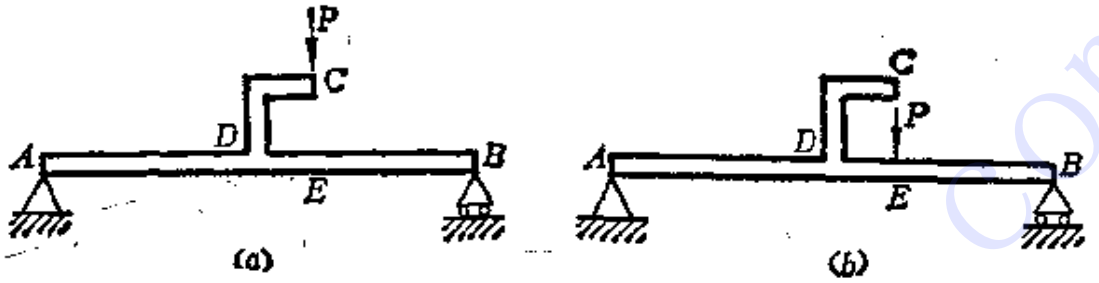
1.8　试就日常生活中所见，列举一些静载荷、动载荷和恒载荷以及体积力、表面力（按面积和按长度分布的）和集中力的实例。

1.9　将实际零、构件的受力、支承等情况简化为材料力学的计算模型时，是只能简化为一种还是可以有不同的模型？试举例说明。

1.10　内力与应力有什么区别和联系？横截面上的法向内力就是该面上法向应力的合力，这样的说法是否合适？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

1.11 在求解材料力学的问题中，理论力学里力的可传性原理什么时候可以应用，什么时候不能应用？图中力 P 的作用点若从 C 处移到 E 处，对支反力有影响吗？对哪一段杆的内力和变形有影响？



题 1.11 图

1.12 对于所学专业或日常生活会遇到的某一种结构物、机械或武器，试分析它的各个零、构件属于哪种杆件或板壳，并分析其中各杆件的受力和变形形式。

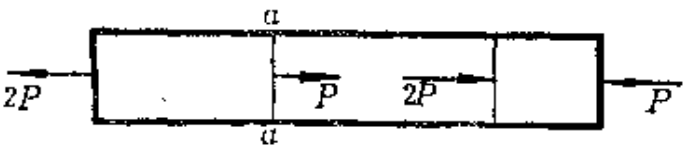
1.13 杆件的基本变形一般有轴向拉伸（压缩）、剪切、扭转和弯曲四种，而应变则只有线应变（正应变）和角应变（剪应变）两种。这样说对吗？

1.14 变形和位移有什么区别和联系？构件中的某一点，若沿任何方向都不产生应变，则该点一定没有位移。试问这种说法是否正确？并举例说明。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第二章　拉伸和压缩

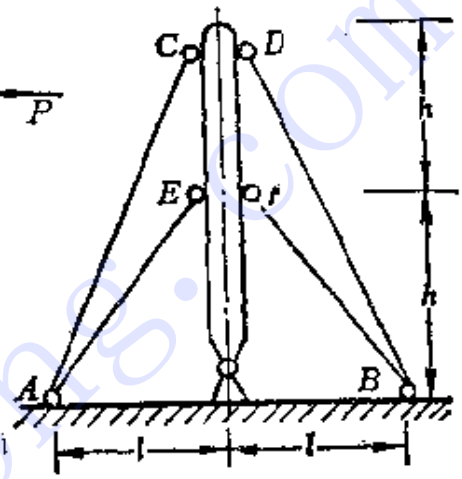
2.1　对于图示的杆件，若刚好在外力 P 作用的截面 a-a 上



题 2.1 图

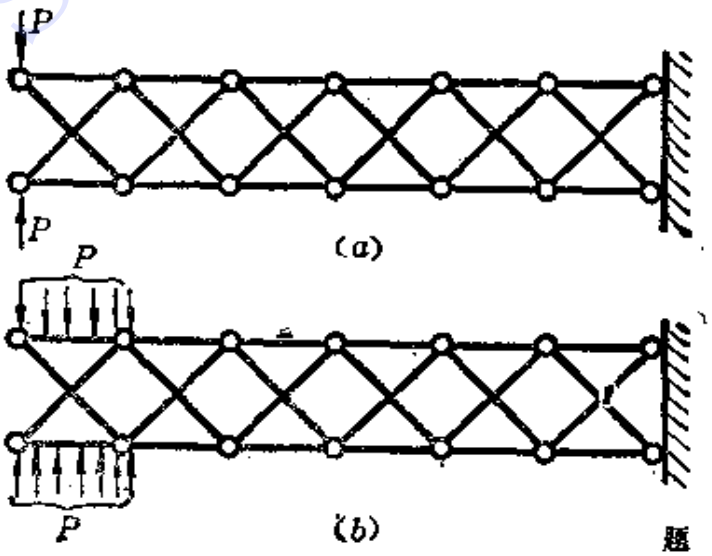
把它假想切开，那么力 P 应算是作用在哪一段上？这样能否得到该截面上确定的内力值？为什么？

2.2　图示一起重桅杆，由四根钢丝绳拉紧，使它保持直立状态。这时 AC 和 BD 两绳的拉力一致，AE 和 BF 两绳的拉力一致。若突然有一根钢丝绳断了，比如 BD，问其他三根钢丝绳的拉力会有什么变化？



题 2.2 图

2.3　两个相同的多节桁架受不同的载荷作用，如图所示，其

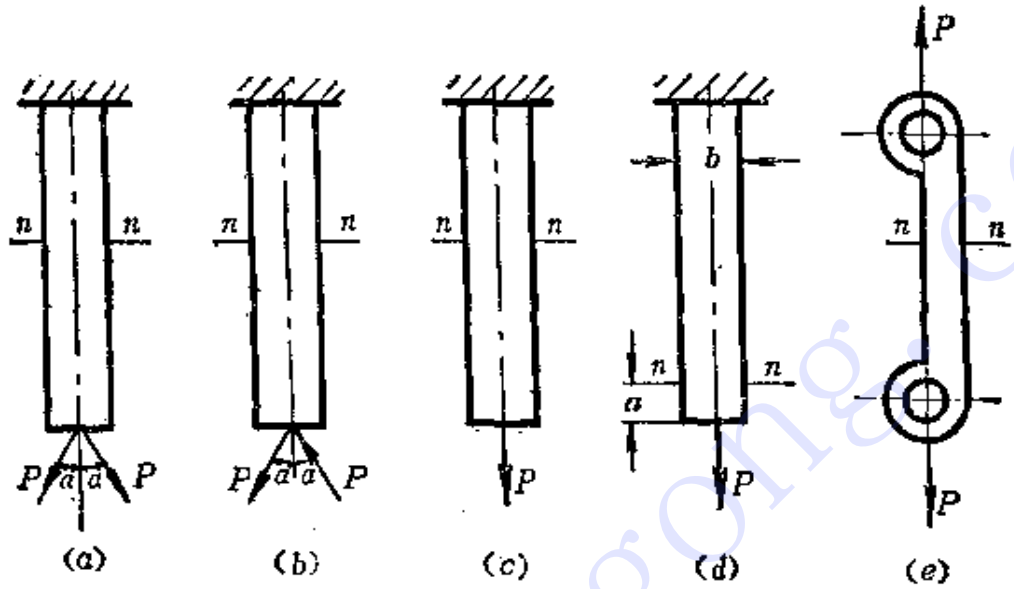


题 2.3 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

中各相交斜杆互不接触。问两种载荷对各节杆件内力的影响是否相同？为什么？

2.4 图示各直杆在 n-n 截面上的正应力，哪些属于均匀分布的？为什么？图 d 中尺寸 $a<b$。

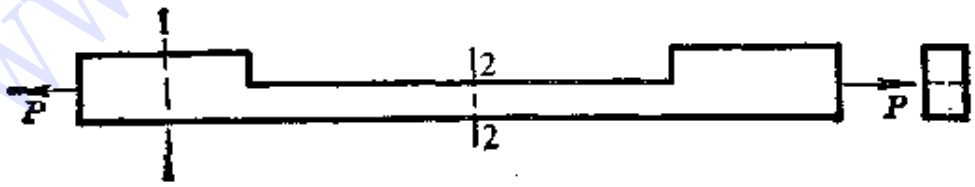


题 2.4 图

2.5 杆件受拉如图，由于截面1-1和2-2上的轴力为 $N_1=N_2=P$，截面积 $A_1=2A_2$，所以正应力分别为

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{P}{2A_2},\qquad \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{P}{A_2}$$

即 $\sigma_2=2\sigma_1$，对吗？如果认为不对，那么，在什么条件下可以得到上述结果？



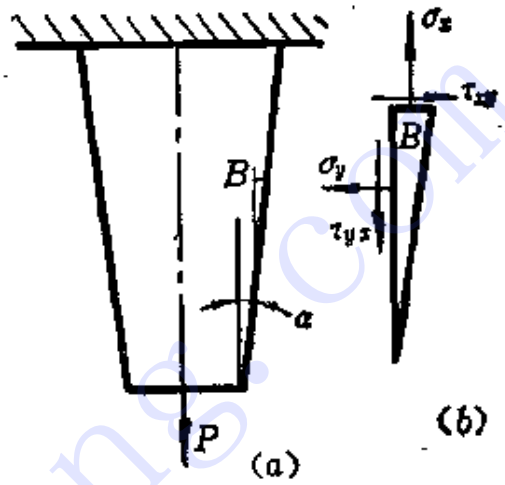
题 2.5 图

2.6 横截面为任意形状的等直杆，如果受拉时整个横截面

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

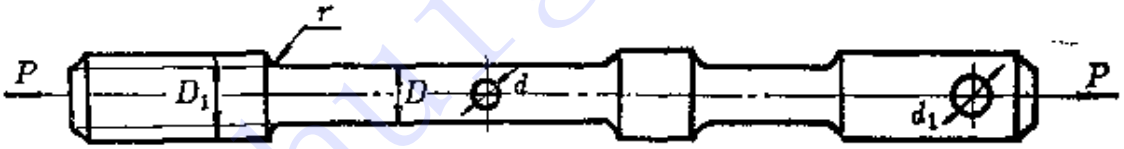
上的正应力是均匀分布的，问此面上的合力作用线是否通过它的形心？怎样用静力学来证明这一点？

2.7 图 a 所示为等厚度、变宽度杆件受轴向拉力作用，其横截面上是否有剪应力存在？平面假设和横截面上的正应力公式 $\sigma = N/A$ 是否仍可适用？为什么？若从杆中 B 点处取出一个五面体（称为单元体）如图 b 所示，则由它的平衡条件求得 $\sigma_x = \tau_{yx}, \sigma_y = \tau_{xy}$，对吗？为什么？



题 2.7 图

2.8 特制受拉圆杆如图，采用简单拉伸的正应力公式 $\sigma = N/A$ 对它进行强度校核时，应注意哪些问题？杆中有直径为 d 和 d_1 的两个圆孔。



题 2.8 图

2.9 已知图示桁架两杆的 $[N_1]=[\sigma_1]\ A_1=2[\sigma_2]A_2=2[N_2]$，为求它的许可载荷 $[P]$，由节点 B 的平衡方程：

$$\Sigma X = 0, \quad -N_1\sin30° + N_2\sin60° = 0 \qquad (a)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad N_1\cos30° + N_2\cos60° - P = 0 \qquad (b)$$

求得 $N_1 = \sqrt{3}P/2$ 和 $N_2 = P/2$。有几位同学用下列不同方法继续求解：

（1）由于 $N_1 > N_2$，所以 $[P] = \dfrac{2}{\sqrt{3}}[N_1]$；

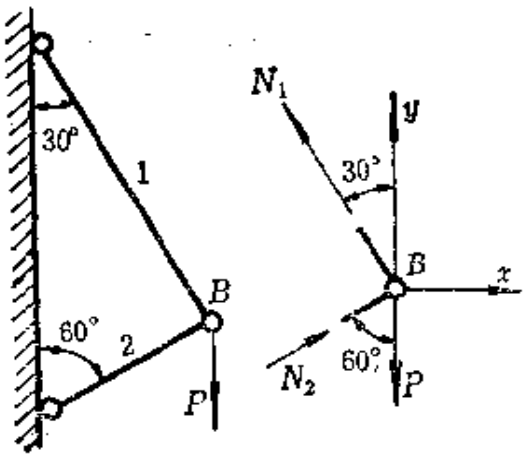
（2）由于 $\dfrac{[N_2]}{[N_1]} < \dfrac{N_2}{N_1}$，所以 $[P] = 2[N_2]$；

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

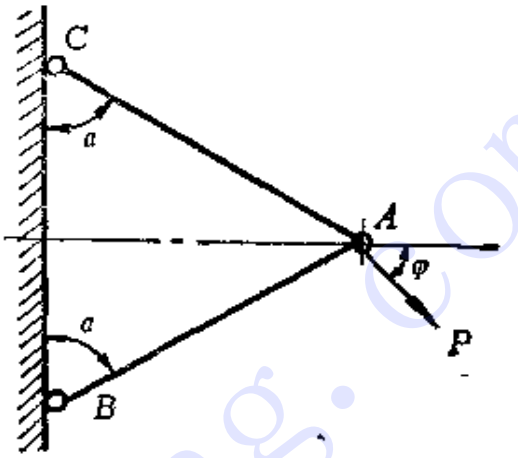
（3）$[P]$ 与两杆都有关，所以由式（b）得

$$[P]=[N_1]\cos30°+[N_2]\cos60°$$

以上谁的解法正确？为什么？



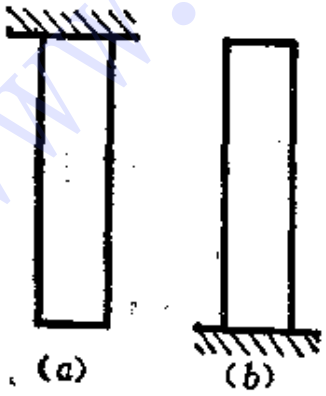
题 2.9 图



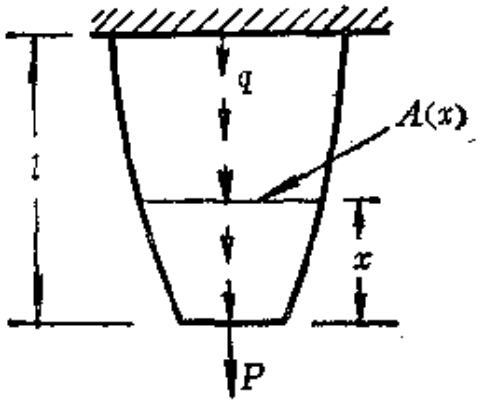
题 2.10 图

2.10 图示桁架两杆的尺寸和材料都相同，在桁架平面内受力 P 的作用。若两杆长度不变，对于下列两种情况，试确定使杆件用料最省的角度 φ 或 α：（1）$\varphi=90°$，确定 α 角；（2）$\alpha=45°$，确定 φ 角。

2.11 已知一等直杆的重量 W、长度 l、弹性模量 E 和泊松比 μ，当按图示不同方式放置时，两者的体积是增大还是缩小？你会计算其体积变化吗？



题 2.11 图

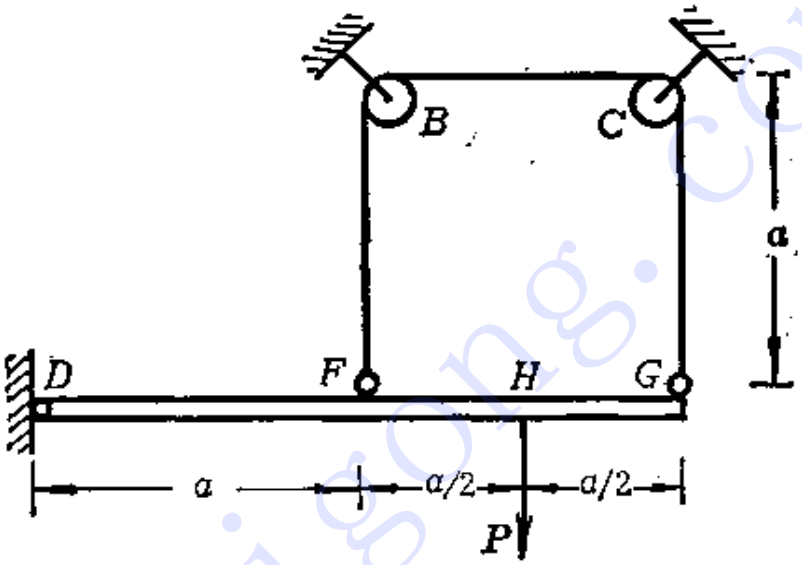


题 2.12 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

2.12 变截面圆杆受力如图，已知集中力 P 和均布力 q、杆的长度 l 和截面积 $A(x)$、弹性模量 E 和泊松比 μ。若认为杆件均匀拉伸，问如何求距底端为 x 处的轴向线应变 ε_x、面积变化率 $\Delta A(x)/A(x)$和总体积变化？

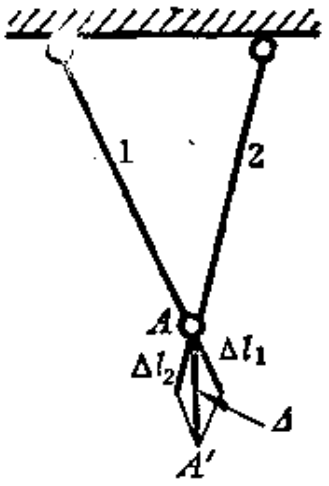
2.13 如图所示，刚性杆 DG 用铰链固定于 D 点，并由绕过 B 和 C 两个滑轮的绳索吊住。求绳索的内力时，这是一个静定还



题 2.13 图

是超静定问题？你能确定着力点 H 的垂直位移吗？绳索是否有某个截面的位置保持不动？你能找到它在哪里吗？

2.14 已算得图示两杆的伸长分别为 Δl_1 和 Δl_2。有人认为，结点位移是向量，所以按照平行四边形定律，以“位移分量”Δl_1 和 Δl_2 为两边作平行四边形，则对角线就表示 A 点的“总位移”Δ。这样做对吗？为什么？



题 2.14 图

2.15 图示对称结构，CC' 为 C 点在铅垂力 P 作用下的位移，CE 垂直于 BC'，由“小变形”知 EC' 等于 BC 杆

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

的伸长Δl_{BC}，$\angle EC'C$ 仍近似等于 α。试指出下列两种算法正确与否。若有错误则指出错在哪里。

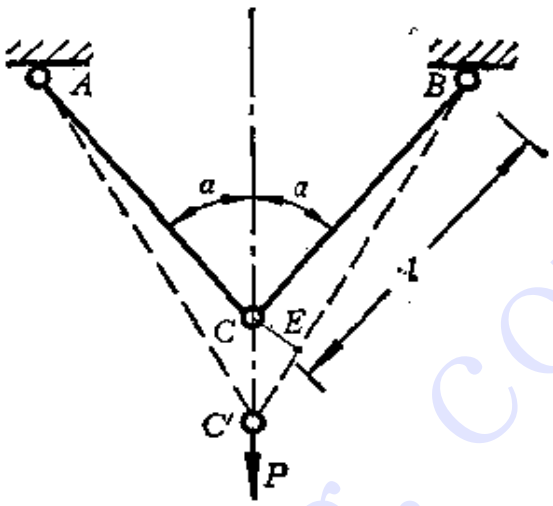
（1）$CC' = \dfrac{EC'}{\cos\alpha} = \dfrac{\Delta l_{BC}}{\cos\alpha}$；

（2）CC'

$= BC'\cos\alpha - BE\cos\alpha$

$= (l + \Delta l_{BC})\cos\alpha - l\cos\alpha$

$= \Delta l_{BC}\cos\alpha$



题 2.15 图

2.16 能否利用一般的万能试验机或拉伸试验机的绘图装置所自动描出的拉伸图来测定材料的弹性模量？为什么？

2.17 通过杆件拉伸试验测定弹性模量时，已知测力的误差为±2%，卡尺的误差为±5‰，引伸计的误差为±0.01，你怎样来估算 E 的最大可能相对误差？

题 2.18 图

2.18 用电测法测定材料的弹性模量E和泊松比 μ 时，往往采用图示的矩形截面板状拉伸试样。试设计电阻应变片的最佳贴片位置，并说明其理由。

*2.19 延伸率一般用 δ_{10} 和 δ_5 表示，它们的含义有什么不同？同一种材料的 δ_{10} 和 δ_5 是一样大吗？为什么？当试件有颈缩但其位置不同时（例如在中间或靠近某一端），对于同样的材料和标距，其 δ 值是否一样？为什么？一般标准规定以颈缩大致居中为准，但试验时却出现了颈缩靠近一端的

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

情况，这样的试验结果是否只能作废？采用怎样的测量和计算方法，就可以得到相当于颈缩居中的有效的δ值呢？

2.20 通常把延伸率$\delta>5\%$的材料叫做塑性材料。是否塑性材料的屈服限σ_s或屈服强度$\sigma_{0.2}$，在拉伸与压缩时都几近相等？可否举出一些塑性材料，其拉伸与压缩的屈服应力存在着不容忽视的差异？

2.21 在拉伸试验中，为什么对σ_s和σ_b用试件三处截面积的最小值计算，而对E和$\sigma_{0.2}$则用试件三处截面积的平均值计算？

2.22 经冷作硬化（强化）的材料，在性能上有什么变化？在应用上有什么利弊？

2.23 在拉伸和压缩试验中，各种材料试样的破坏形式有哪些？试从宏观上大致分析其破坏的原因。

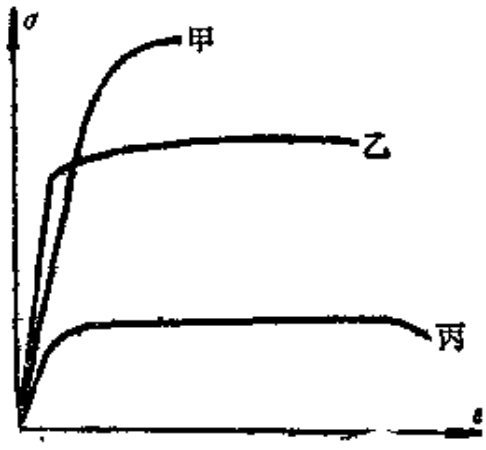
2.24 在灰铸铁压缩试验中，测量一下试样断裂面的倾角，并研究此倾角为什么不是45°。

*2.25 通常把延伸率$\delta<5\%$的材料叫做脆性材料，$\delta>5\%$的叫做塑性材料。是否塑性材料制成的圆柱形试样都只能压成薄圆饼状而不能压至破裂，因而得不到压缩强度限？是否脆性材料则必定被压破而不会被压成薄圆饼状？

2.26 某种材料的压缩强度限是拉伸强度限的四倍左右，是否压缩弹性模量也是拉伸弹性模量的四倍左右？

2.27 从拉伸试验所测得某种材料的屈服限或屈服强度、强度限、延伸率和断面收缩率，能否判断这种材料拉伸时是否发生了颈缩？为什么？

2.28 图示三种材料的拉伸应力-应变曲线，试比较它们的强度、刚度和塑性。

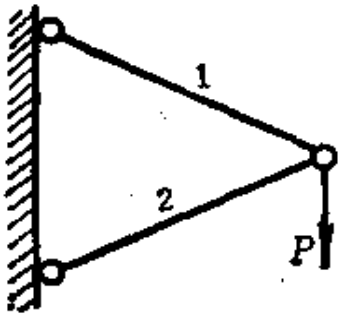


题 2.28 图

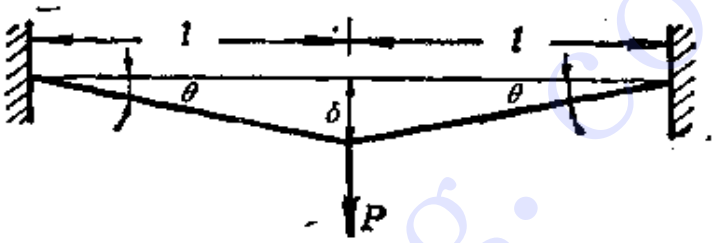
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

2.29 甲说灰铸铁是脆性材料，低碳钢是塑性材料，所以灰铸铁的变形比低碳钢小。乙说低碳钢的强度比灰铸铁大，所以它的变形比灰铸铁小。在这个争论中，你要发表什么样的意见呢？

2.30 备有低碳钢和灰铸铁的杆件可供你选用，试问如何构造图示桁架比较合适？



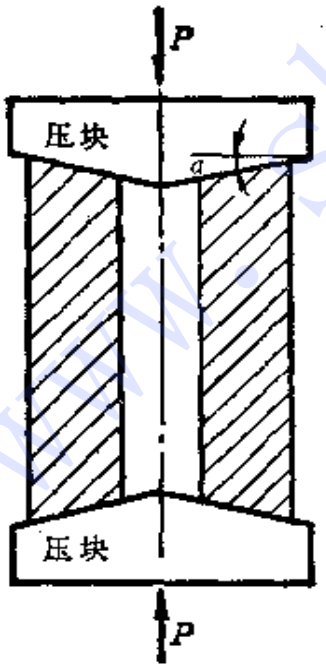
题 2.30 图



题 2.31 图

*2.31 图示一种"弦丝测力计"，当弦丝为线弹性材料时，问这种测力计的P-θ特性曲线是直线还是曲线？你能把它画出来吗？

*2.32 用同一材料制成直径相同而长度不等的压缩试样，由试验画出它们的压缩应力－应变曲线是否相同？为什么？



题 2.33 图

2.33 如图所示，将压缩试样制成两端有凹锥的圆筒形，同时压块亦制成与之吻合的圆锥形。这样做有什么好处？如何确定合适的角度α？

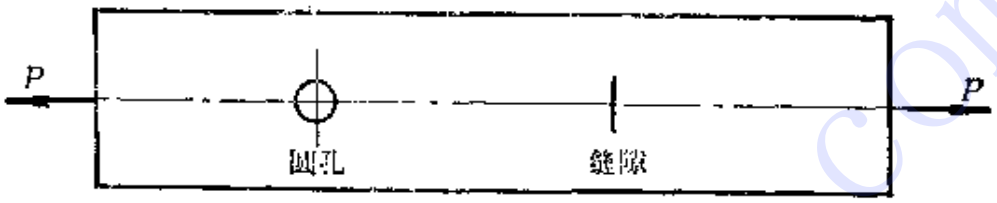
2.34 在弹性范围内，空心圆杆受轴向压力时，如果不考虑两端摩擦力的影响，它是否外径扩大、内径缩小？为什么？

2.35 灰铸铁试样受拉伸时，为什么断口常常发生在标距段与夹持段

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

之间？如果在中间断开，这可能是什么原因？试对后者的断口作一仔细的观察。

2.36 取一张长约240mm，宽约60mm 的纸条，在其中剪一直径为10mm的圆孔和长为10mm的横向缝隙，如图所示。当用手拉纸条的两端时，问破裂从哪里开始？为什么？



题 2.36 图

2.37 受拉伸和压缩的杆件，在怎样的情况下会发生应力集中现象？应力集中系数是否与材料有关？在静载条件下如何考虑应力集中对塑性材料和脆性材料的影响？

2.38 试指出下列概念的区别和联系：

（1）比例限与弹性限；

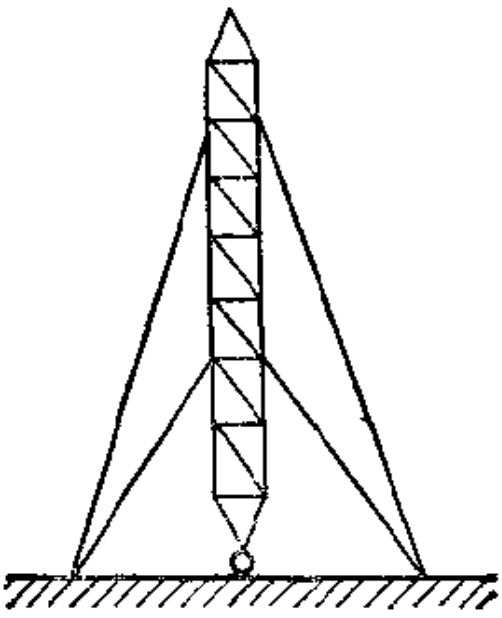
（2）工作应力、极限应力（或危险应力）与许用应力；

（3）延伸率与线应变；

（4）断面收缩率与横向线应变。

2.39 泊松比 μ 的数值一般在什么范围？若 $\mu=0$，$\mu<0$，$\mu=0.5$，$\mu>0.5$，则材料在单向拉伸时会产生什么结果？会不会 $\mu>1$？

2.40 图示一塔架，下端用柱铰安装在地面上，两边左右对称地用绳索拉住。当从左面或右面有风吹来时，为确定

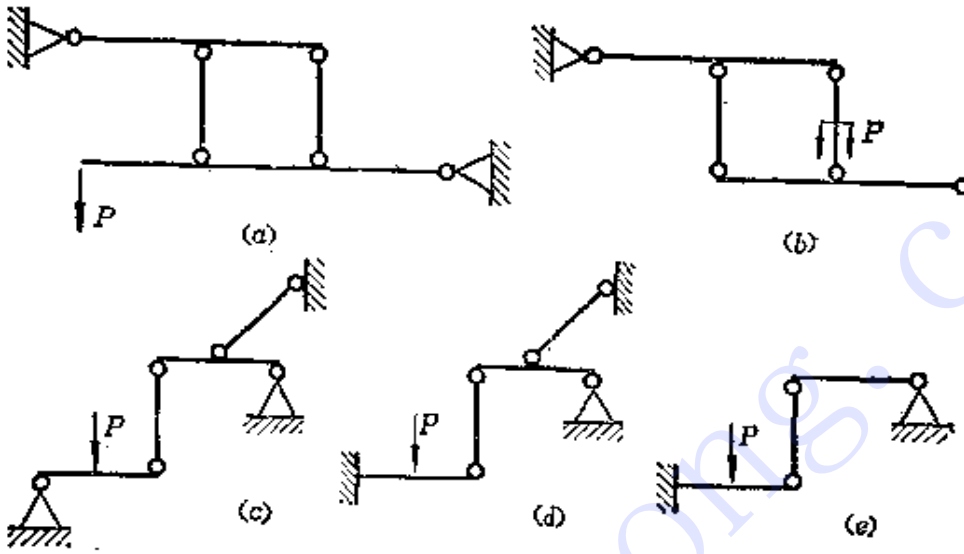


题 2.40 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

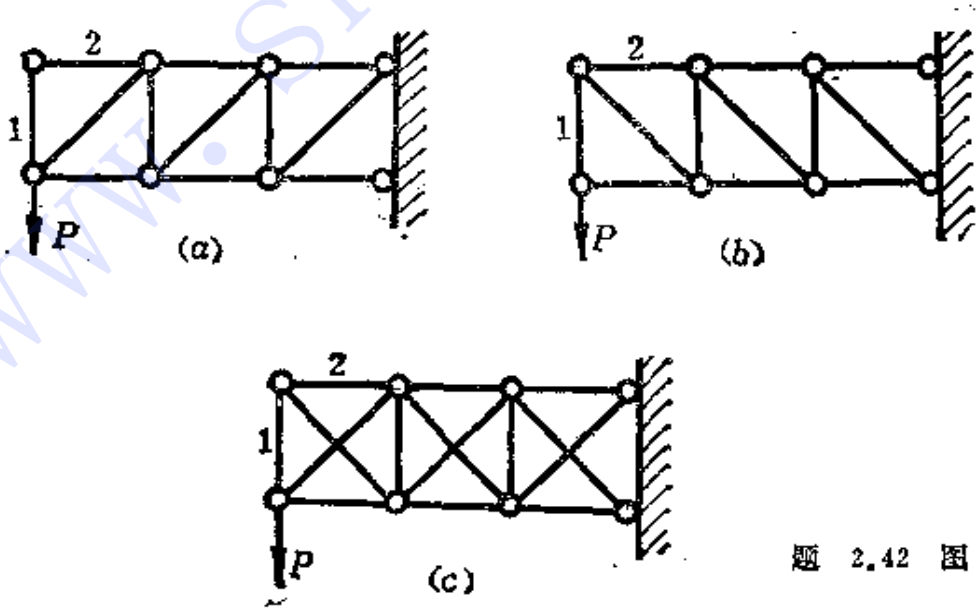
绳索的内力，你看这是几次超静定问题？

2.41 若不计结构自重，试判断图示各杆系结构是静定的还是超静定的。



题 2.41 图

2.42 图示三种结构，各杆材料和截面积相同，杆 1 和 2 的长度相等，且图c各交叉斜杆中间互不接触。问各结构中 1 和2两杆的内力有什么不同？



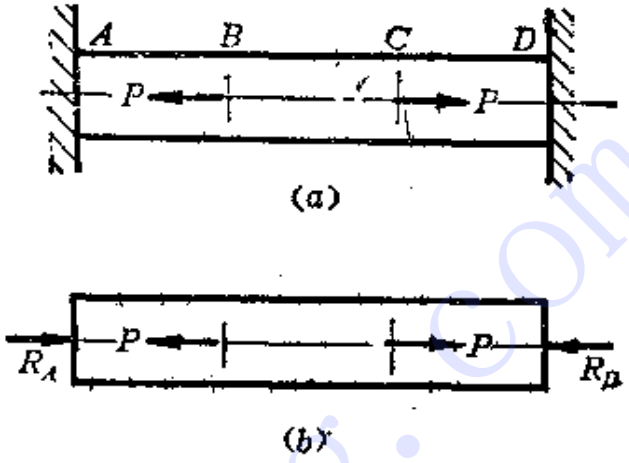
题 2.42 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

2.43 对于图a所示等截面直杆，试指出下列两种分析方法是否有错误，并由此得出应有的结论。

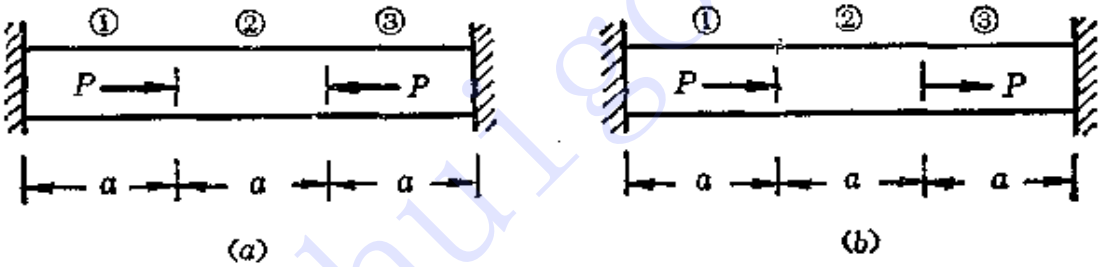
（1）因为两个载荷P的大小相等、方向相反，自相平衡，所以两端支反力$R_A=R_D=0$。

（2）两个载荷P分别使AB和CD两段受压力P，所以两端支反力$R_A=R_D=P$，方向如图b所示。



题 2.43 图

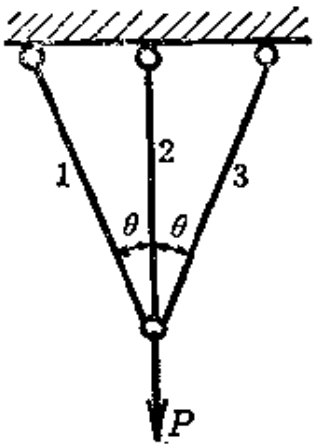
*2.44 图示两杆的载荷有什么特点？你能利用这种特点来分析它们的变形和内力吗？



题 2.44 图

2.45 图中所示三杆的截面积相同，但杆1与3的弹性模量不相等（$E_1>E_3$）。有人从平衡的角度出发，认为杆1与杆3的内力相等；有人则从超静定体系的特点出发，因内力按刚度分配，认为杆1的内力要比杆3的大。你认为应该怎样呢？此结构的变形协调方程是否如下所列？

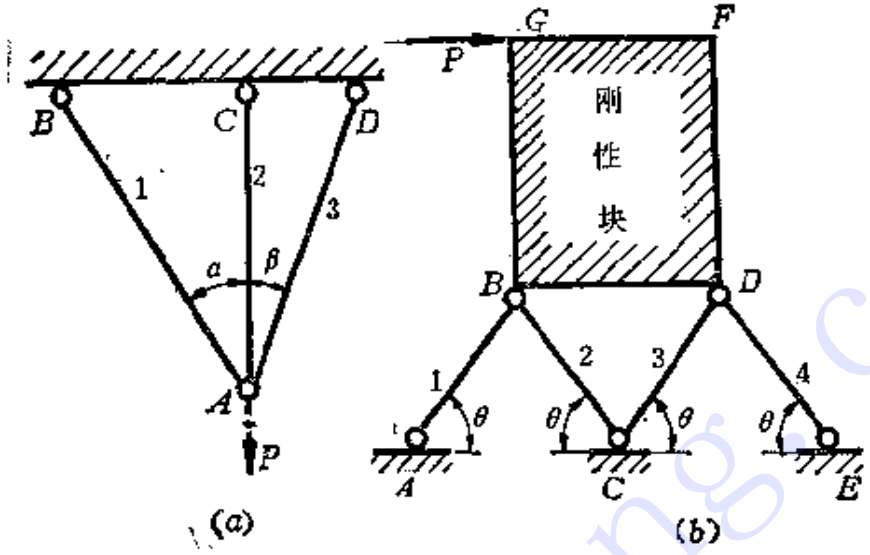
$$\Delta l_1=\Delta l_3=\Delta l_2\cos\theta$$



题 2.45 图

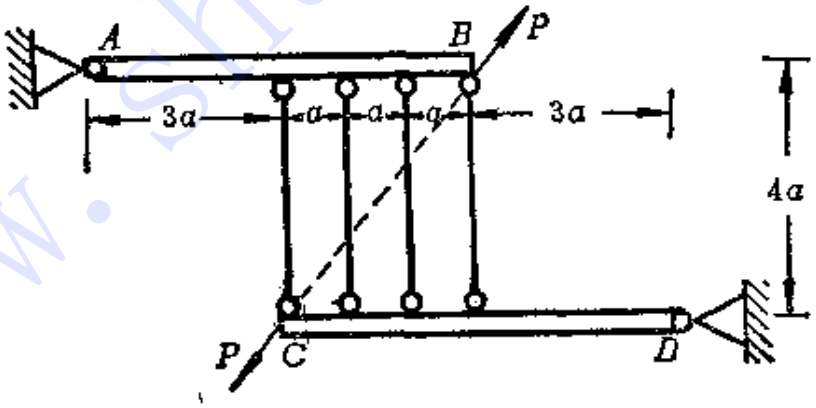
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*2.46 试分别以A点（图a）和B、D点（图b）列出求解两个结构内力时所必需的变形协调方程。



题 2.46 图

2.47 图示结构中，AB和CD为刚性杆，其间由四根相同的直杆相连。在一对集中力（相背或相向）作用下，这个结构是静定的还是超静定的？试列出求解四根杆的内力所需的有关方程。

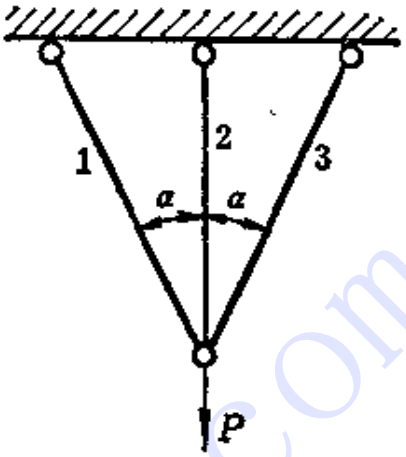


题 2.47 图

2.48 图示结构中三根杆的材料和截面积均相同，已算得各杆横截面上的正应力分别为$\sigma_1<[\sigma]$，$\sigma_2=1.5[\sigma]$，$\sigma_3<[\sigma]$。鉴

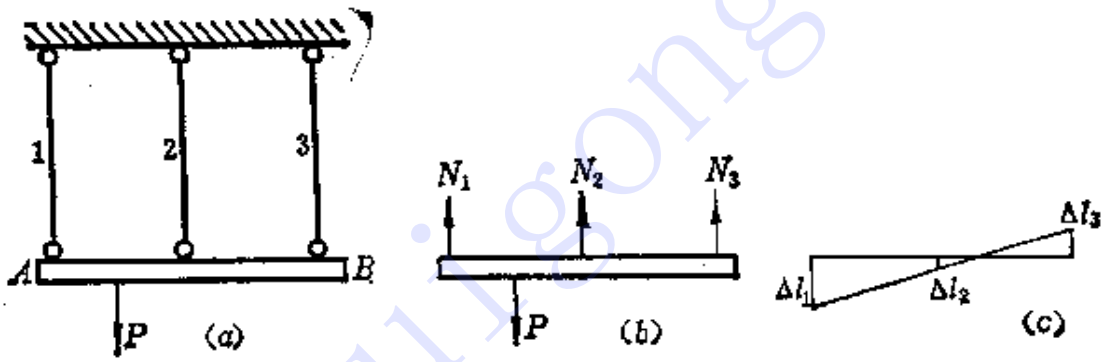
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

于杆2强度不够，有人认为只要把杆2的截面积增加50%，即可保证结构的强度足够。你认为他的意见怎样？为什么？



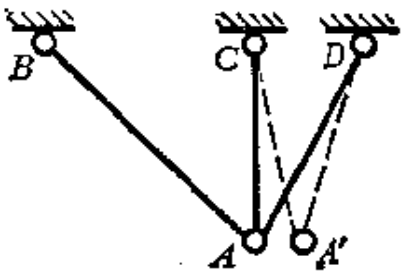
题 2.48 图

2.49 为求图示超静定结构中杆1、2和3的内力（假定AB为刚性杆），有人画出的受力图和变形图分别如图b和c。这里有问题吗？



题 2.49 图

2.50 图示三根杆的构架，没有载荷作用。但当拆除AB杆时，节点A就移到了A'处，这是什么原因引起的呢？



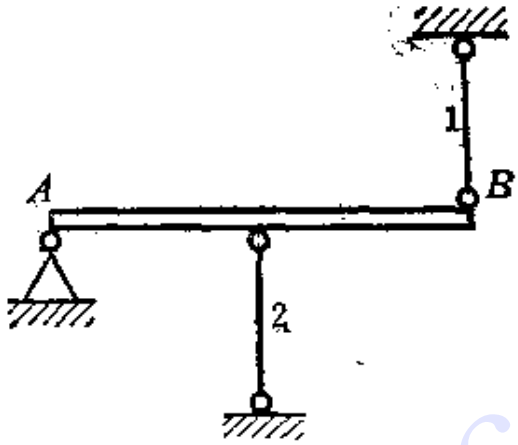
题 2.50 图

2.51 超静定体系中，由于构件制造不准确会产生装配应力。试说明装配应力的利弊，并举出工程中利用装配应力的一些例子。

2.52 图示结构中，AB为刚性杆，装配后1、2两杆仍处于弹性范围内，但已受有内力。你能想办法测量出这两根杆应力的大小吗？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

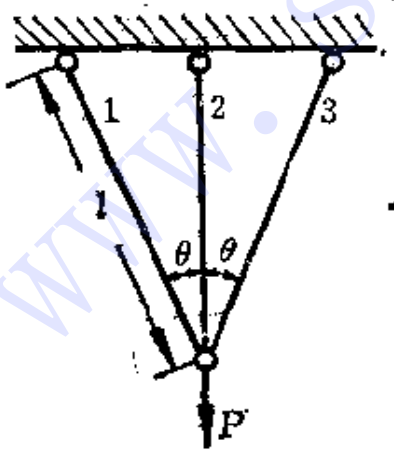
2.53 图示装有套筒的螺栓，将螺母拧紧一圈后算得螺栓和套筒的轴力（绝对值）分别为N_1和N_2。当再在螺栓两端施加拉力P时，若螺栓与套筒两端仍然密切接触，螺栓的轴力是否为$N_1' = N_1 + P$？为什么？



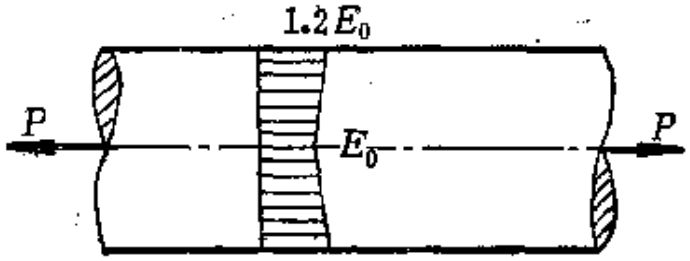
题 2.52 图

题 2.53 图

*2.54 图示结构中，三根杆的弹性模量E、许用应力$[\sigma]$和截面积A均相同。为了充分发挥材料的作用，要求在P力作用下三根杆的应力同时达到$[\sigma]$，这该怎么办？若利用装配应力，问在装配之前杆2的原始长度应该大于还是小于$l\cos\theta$（$0<\theta<\pi/2$）？



题 2.54 图



题 2.55 图

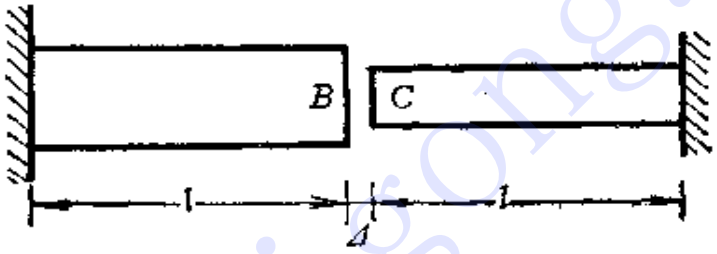
*2.55 图示一根相当长的圆截面杆，材料的弹性模量由中心

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

处为E_0而沿径向按直线规律变化，到周边处为$1.2E_0$。问此时平面假设和正应力公式$\sigma = N/A$是否仍然适用？

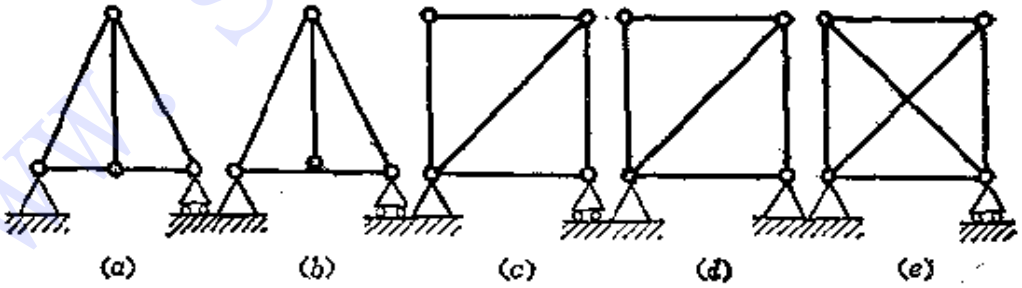
*2.56 一个由纤维增强的聚合物材料制成的试片，在拉伸试验机上测得其破坏时的总拉力为P_b。纤维沿纵向均匀分布于基体之中，若两者的弹性模量和截面积分别为E_1、E_2和A_1、A_2，试分析它们各承受多大的拉应力。

*2.57 图示两杆的长度和材料均相同，但截面积不相等（左杆为$2A$，右杆为A），它们之间有一缝隙Δ。当两杆同时均匀升温时，试分析它们刚好接触和接触以后端面B和C的位移（最好同时画图来表示）。



题 2.57 图

2.58 图示各结构（图e中两斜杆不接触），当温度升高时，哪些将产生温度应力？为什么？



题 2.58 图

2.59 有一根两端被固定的等截面直杆，当四周均匀加热时，杆件任一截面的轴向位移等于多少？你能加以证明吗？

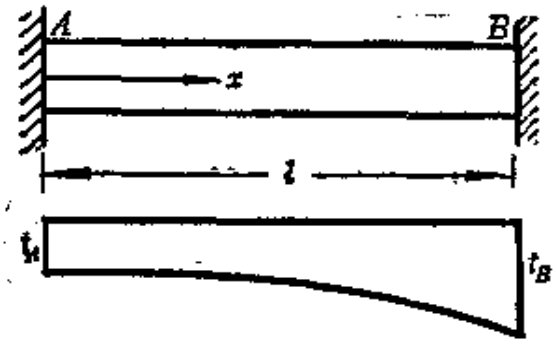
2.60 有一根两端被固定的等截面直杆，当受到如下沿轴向

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

的温度变化时（见图）

$$t(x)=t_A+(t_B-t_A)\left(\frac{x}{l}\right)^n$$

问如何求约束反力？

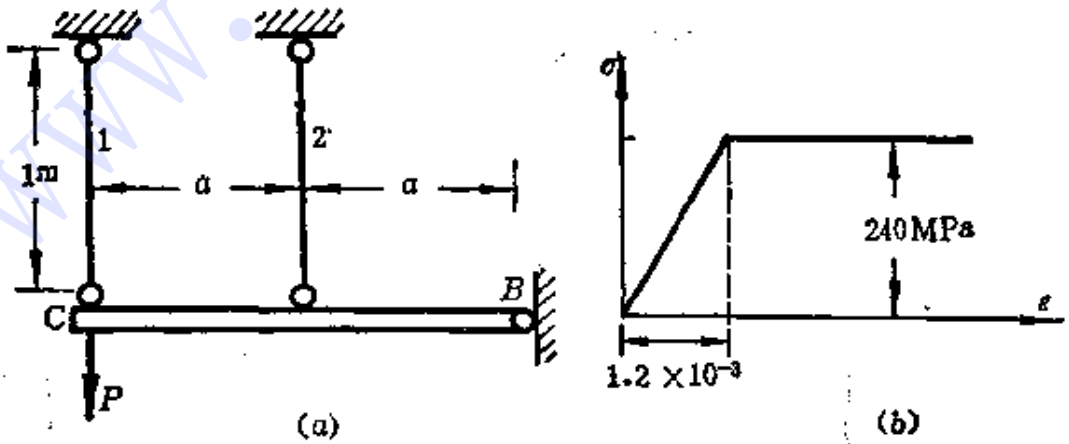


题 2.60 图

题 2.61 图

2.61 在有输送热气管道的工厂里，你可以看到管道不是笔直铺设的。每隔一段距离，管道就弯成一个门框似的（见图）。你考虑一下，这种做法有什么力学意义？

*2.62 图a中BC为刚性杆，1和2两杆材料的应力应变曲线如图b，截面积均为$A=10000\text{mm}^2$。在P力作用下它们的伸长量分别为$\Delta l_1=1.8\text{mm}$和$\Delta l_2=0.9\text{mm}$。问如何确定两杆的应力和载荷P？若将载荷全部卸除，各杆是否恢复原状，杆1和2有无应力？



题 2.62 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

2.63 超静定体系有什么特性？在工程实际中如何利用这些特性？

2.64 简单拉伸和压缩这一章，除了某些超静定题目外，并不太复杂。但这一章在某种意义上是材料力学的一个缩影，因此，学完这一章后建议作一小结。这对后面各章的学习是会有好处的。

www.shuigong.com

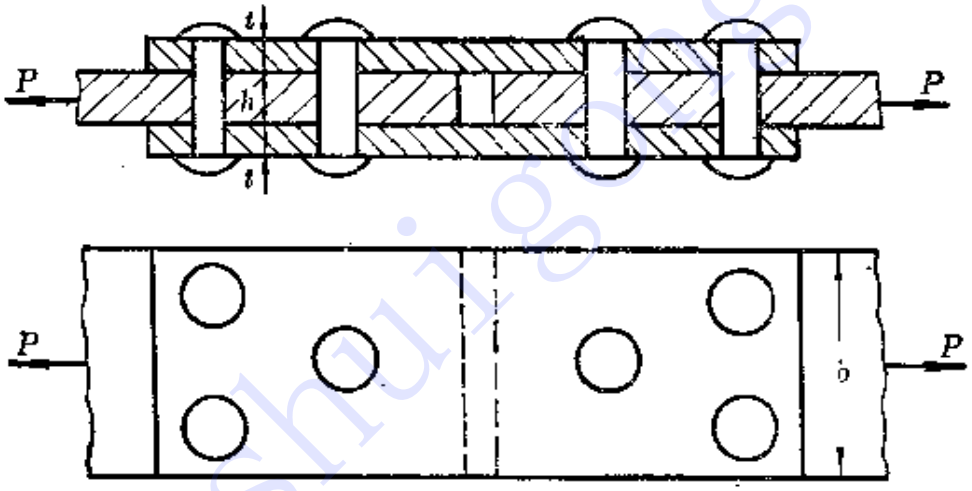
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第三章　剪切和扭转

3.1　你见过哪些连接方式和连接件？试列举几个例子。

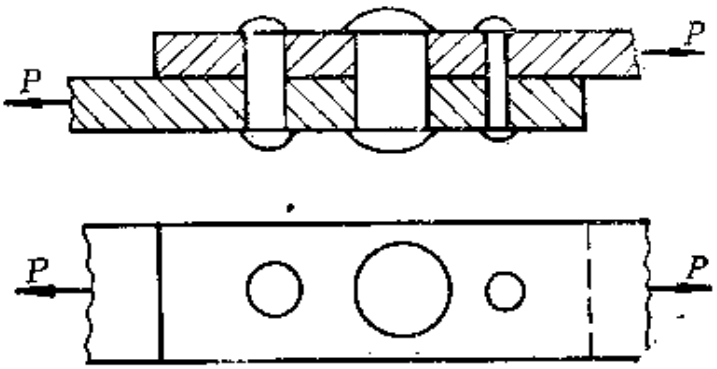
3.2　在材料力学中，为什么说连接件的计算是一种“实用计算”？其中引入了哪些假设？这些假设的根据是什么？

3.3　在图示铆接中，力是怎样传递的？如何分析主板和盖板的强度？若板与铆钉的材料相同，铆钉的直径均为d，问要满足哪些强度条件，才能保证整个铆接结构的安全？



题 3.3 图

3.4　铆接如图所示。当各铆钉材料相同而直径不同时，如何校核其强度？



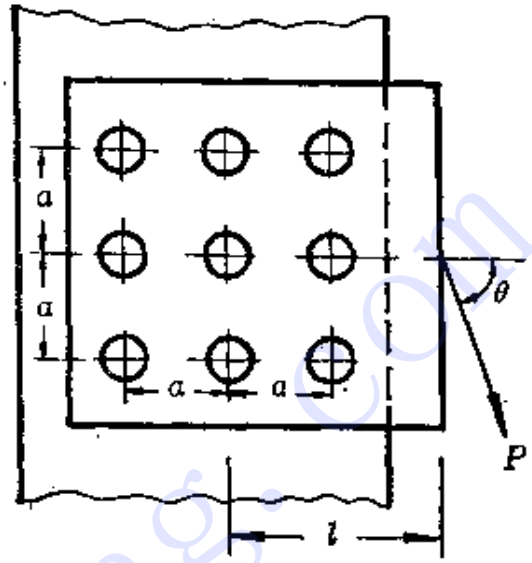
题 3.4 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*3.5 两钢板铆接和受力情况如图。若各铆钉的材料和直径相同，问如何计算它们所受到的剪应力？

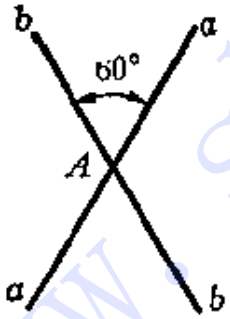
3.6 在工程设计中，对于铆钉、销钉等圆柱形连接件以及被连接件圆孔处的挤压强度问题，为什么可以采用“直径截面”而不是用直接受挤压的半圆柱面来计算挤压应力呢？

3.7 挤压与压缩有什么区别？为什么许用挤压应力比许用压缩应力大？

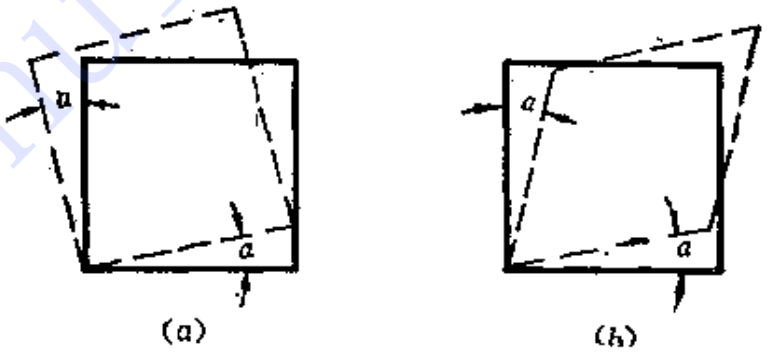


题 3.5 图

3.8 在平板变形前画有夹角为60°的两条直线 aa 和 bb，如图所示。若变形后此夹角为59.5°，问 A 点处的剪应变是否等于0.5°？



题 3.8 图



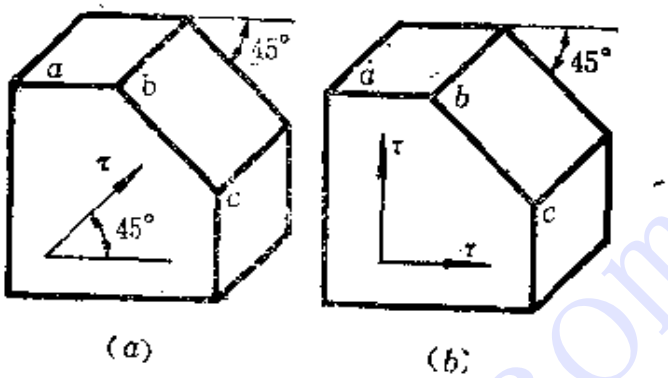
题 3.9 图

3.9 构件变形前有两个正方形单元体如图中实线所示，虚线则表示构件变形后单元体的形状，问它们的剪应变各为多少？

3.10 有人把剪应力互等定律推广为剪力互等定律，即互相垂直的截面上与两面相交棱边垂直的剪力也是大小相等、共同指向或背向棱边。你认为能这样推广吗？为什么？

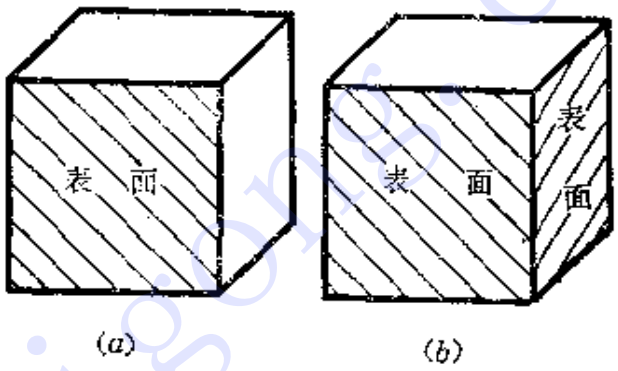
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

3.11 已知图中所示单元体铅垂面上的剪应力τ，问a、b和c各面上的剪应力有多大？方向如何？



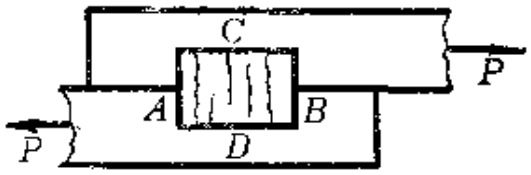
题 3.11 图

3.12 图示从构件中取出的两个单元体，除写明是表面的以外，其他都是截面。当表面没有外力作用时，问哪些截面上可能有剪应力？它的方向应该怎样？哪些截面上则不可能有剪应力？



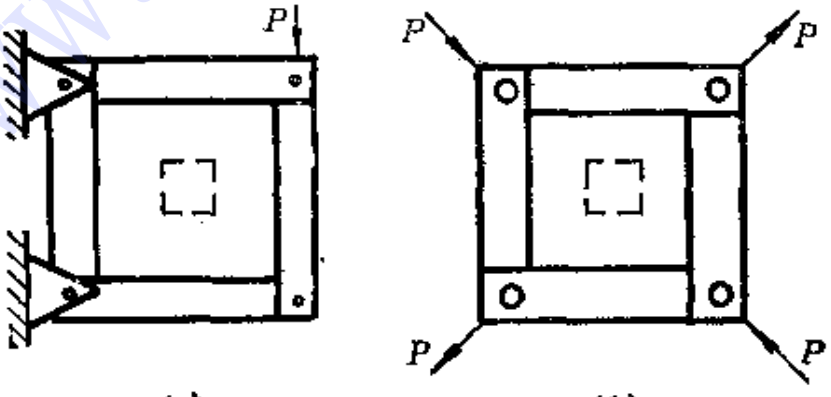
题 3.12 图

3.13 如图所示，木栓阻止着上下两块木板相对滑移，因而在截面AB上直接受到剪力作用。但当P力逐渐加大时，木栓最后却沿着纹理方向CD破裂。你能解释这种现象吗？



题 3.13 图

3.14 正方形等厚平板，四边被铰接的刚性框架夹紧，如图所示。当结构受到P力作



题 3.14 图

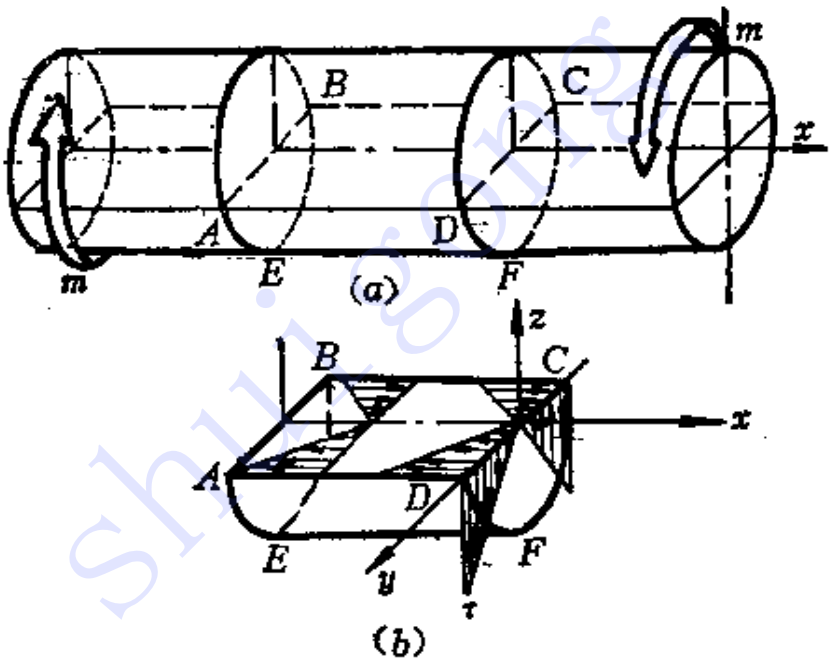
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

用时，在板中心的小方块会产生什么样的变形和应力？

3.15 材料和安全系数相同时，连接件的许用剪应力与扭转轴的许用剪应力是否相同？为什么？

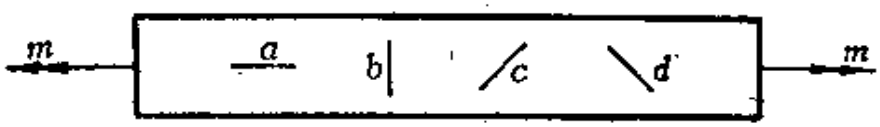
3.16 一等直圆杆，当受到轴向拉伸时，杆内会产生剪应变吗？当受到扭转时，杆内会产生拉应变吗？

3.17 在图a所示的受扭圆轴上，用横截面ABE和CDF以及水平截面$ABCD$截出一部分如图b。由剪应力互等定律可知截面上的剪应力分布如图所示。试问在截面$ABCD$上由剪应力所构成的合力偶与什么力偶相平衡？



题 3.17 图

3.18 圆试件受扭如图，试说明a、b、c和d四种破坏形式各发生在什么材料制成的试件上，并说明它们破坏的原因。



题 3.18 图

3.19 低碳钢圆试件受扭时，由剪应力互等定律可知其每点

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

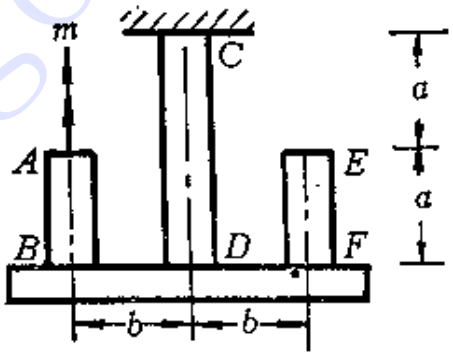
在纵、横截面上所受的剪应力大小相等。为什么试件总是沿横截面被剪断？

*3.20 用软钢或某种塑性很好的塑性材料制成的扭转圆试件，在扭转之后，试件表面的母线变成了螺旋线。问母线有没有伸长？试件的长度和直径有没有变化？最好通过试验来研究这个问题。

3.21 用电阻应变仪测量圆杆扭转时的剪应力，电阻应变片可以有几种贴法？哪一种较好？

3.22 试从弹性范围应力分布的角度，说明扭转时为什么空心圆轴比实心圆轴能较充分发挥材料的作用。如果圆轴由理想塑性材料制成，当扭转到整个截面都屈服时，空心圆轴是否仍然比实心圆轴能较充分发挥材料的作用？

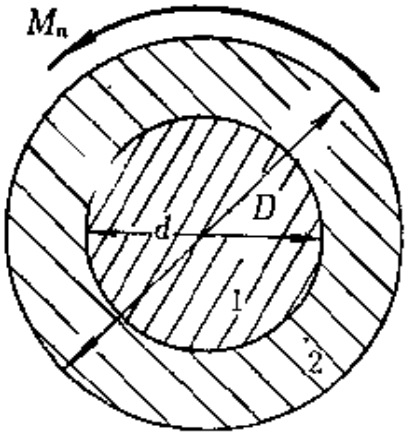
*3.23 图示同一平面内的三根圆杆AB、CD和EF，直径和材料都相同，下端焊接在刚块BDF上。当在A处作用有力偶m时，问A、E两个面的角位移和线位移是否相等？



题 3.23 图

*3.24 圆轴扭转时，各点处的比能是否可以由轴的总变形能除以它的体积求得？为什么？反之，是否可以由纯剪状态的比能求得圆轴扭转时的总变形能？

*3.25 图中表示由两种材料在交界面上牢固结合而成的组合圆轴的横截面。已知两部分的极惯矩分别为I_{p1}和I_{p2}，剪切弹性模量$G_1=2G_2$，承受扭矩M_n，问如何推导此组合轴横截面上的剪应力公式？横截面上的剪应力是怎样分布的？

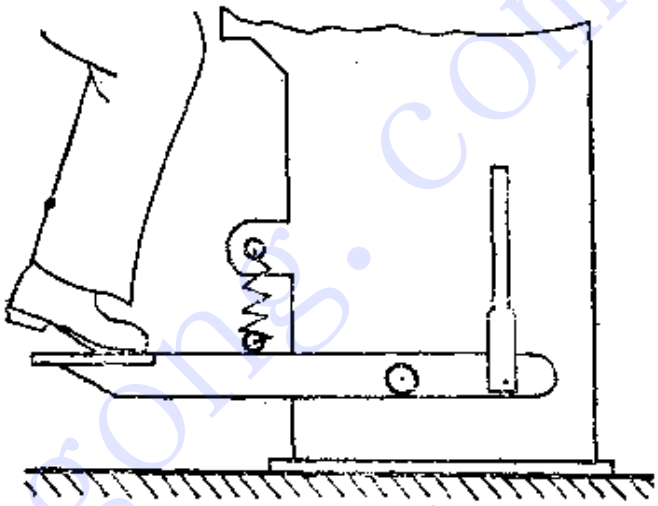


题 3.25 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*3.26 用理想塑性材料制成的圆轴，扭转至局部屈服后，卸去载荷。若重新加载的转向与原加载的相同，屈服限是提高、降低、还是不变？若重新加载的转向与原加载的相反，情况又会怎样？

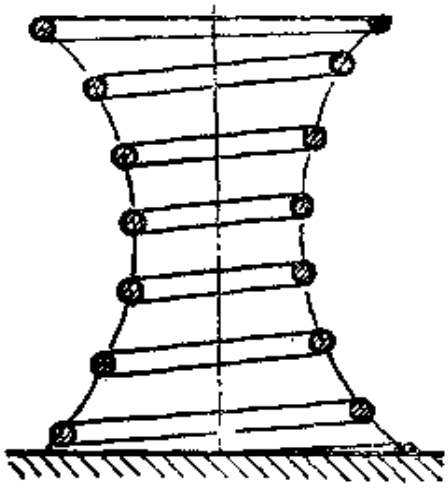
3.27 冲压机操作工人通过踩动踏板来操纵冲压部分。踏板装有一圆柱形螺旋弹簧，使其在每次踩动后自动恢复原位，如图所示。由于设计不当，工人踩动踏板太费劲。你能否设法改变弹簧，使操作轻便些？



题 3.27 图

*3.28 实验表明，密圈圆柱螺旋弹簧受轴向拉伸或压缩时，簧杆横截面只沿簧圈轴线产生位移，而在其自身平面内并不转动。试定性分析这一现象的原因。

*3.29 人们在日常生活中到处可以看到弹簧的应用。你注意到沙发的弹簧是什么样子吗？试分析一下为什么不绕成圆柱形螺旋弹簧而绕成图示的形状？



题 3.29 图

3.30 自由扭转与约束扭转有什么区别？对于圆截面等直杆，是否有约束扭转问题？

*3.31 试用正反对称性说明扭转时圆杆横截面保持平面和非圆杆横截面产生翘曲的道理。

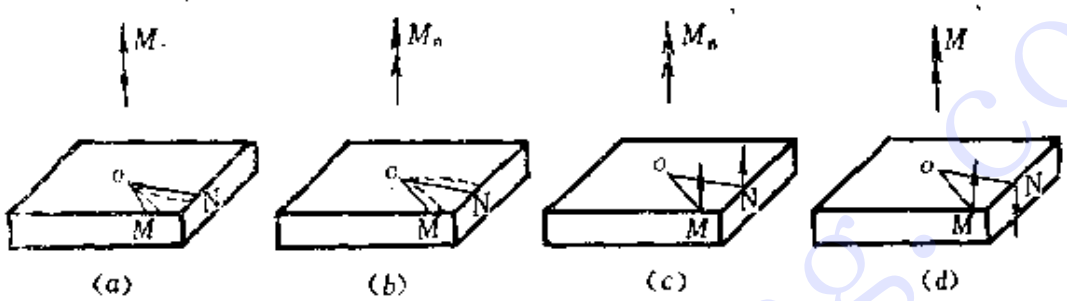
3.32 一正方形截面轴受扭

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

转，试用正反对称性说明下述的截面变形情况哪些是不可能的：

（1）图a和b表示对横截面内的径向线OM和ON所设想的两种变形；

（2）图c和d表示对M和N两点所设想的两种沿铅垂方向的位移。



题 3.32 图

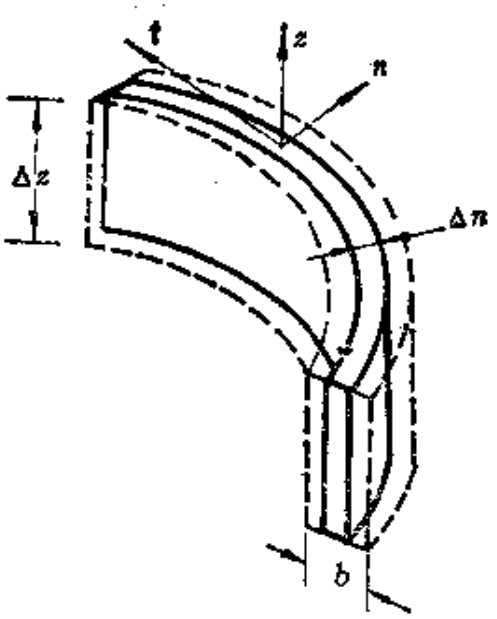
*3.33 图示一受扭转的棱柱体，在各侧表面上无任何外力作用，问其横截面上在凸角尖A处是否必无剪应力？为什么？在柱体扭转理论的发展过程中，圣维南曾经认为在凹角尖B处的剪应力也等于零，对吗？

题 3.33 图

3.34 对于等直杆的扭转，狭长矩形截面上的剪应力方向，除两短边附近之外，可以认为是与长边平行的，因而截面对角线上的剪应力方向基本上与长边平行。正方形截面对角线上的剪应力方向则必定垂直于对角线（为什么？试论证之）。除这两者之外，即一般的矩形截面，如果认为对角线上的剪应力方向亦与对角线垂直，对吗？试分析此时可能的方向。

3.35 从一空心薄壁杆中截出如图所示的单元体，假定此杆受扭转时，处处有$\sigma_n = \tau_{nz} = \tau_{nt} = 0$，试由此单元体推断$\sigma_t$也必定为零。

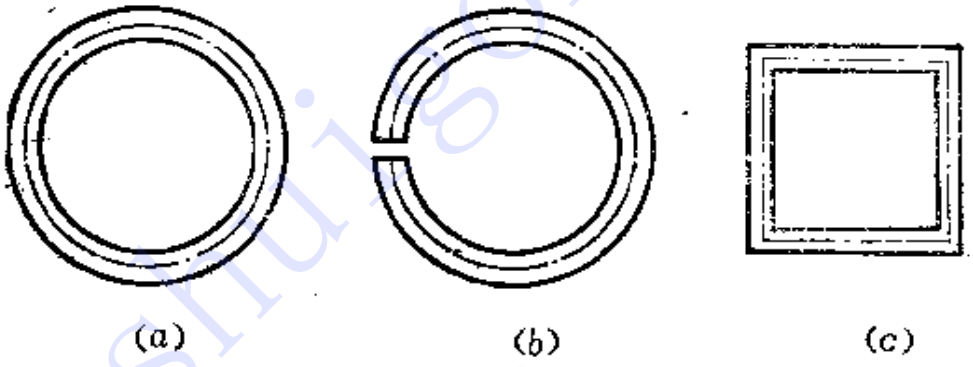
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 3.35 图

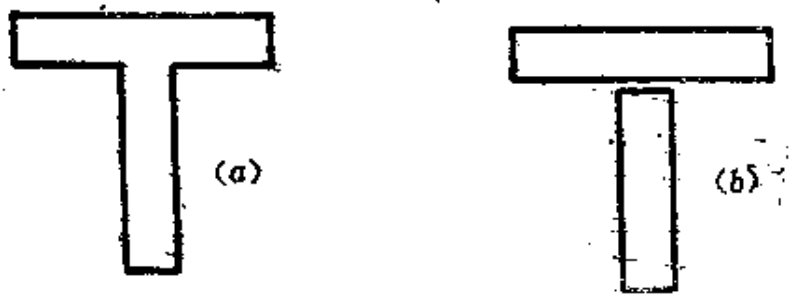
3.36 变壁厚而等截面的开口和闭口薄壁杆件自由扭转时，它们的最大剪应力发生在壁厚最大还是最小处？为什么？

3.37 在纯扭转时，开口和闭口薄壁管中剪应力的分布情况有什么不同？图示三种截面薄壁管的材料、长度、壁厚和管壁中线的周长均相同。问哪一根管子的抗扭能力最强？哪一根最弱？



题 3.37 图

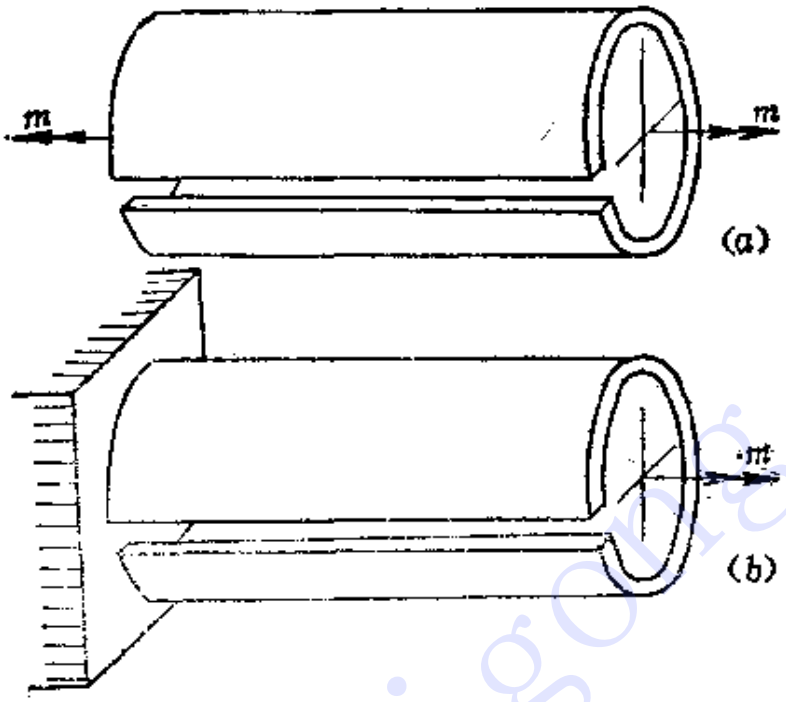
3.38 试画出图示两种 T字形薄壁截面杆扭转时横截面上的剪应力分布及其走向。



题 3.38 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

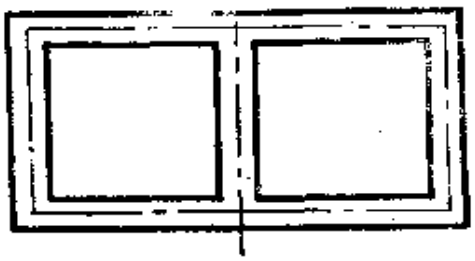
3.39 两根材料和尺寸完全相同的开口薄壁圆管，受到同样大小的扭矩作用，如图所示。问两管内的应力状态是否相同？



题 3.39 图

*3.40 图示为对称薄壁盒形截面，当杆发生纯扭转变形时，中间腹板有无剪应力存在？为什么？

*3.41 对于受扭杆件，用薄膜比拟法可以帮助分析剪应力的分布情况。你知道截面上任一点处的剪应力大小和方向与薄膜在该点处的斜率有怎样的关系吗？截面所承受的扭矩大小与薄膜所围的体积又存在什么关系？



题 3.40 图

*3.42 试用薄膜比拟法说明：（1）开口与闭口薄壁截面杆扭转时剪应力分布为什么不同；（2）开口薄壁截面杆扭转时为什么最大剪应力发生在壁厚最大处（以工字形截面为例）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

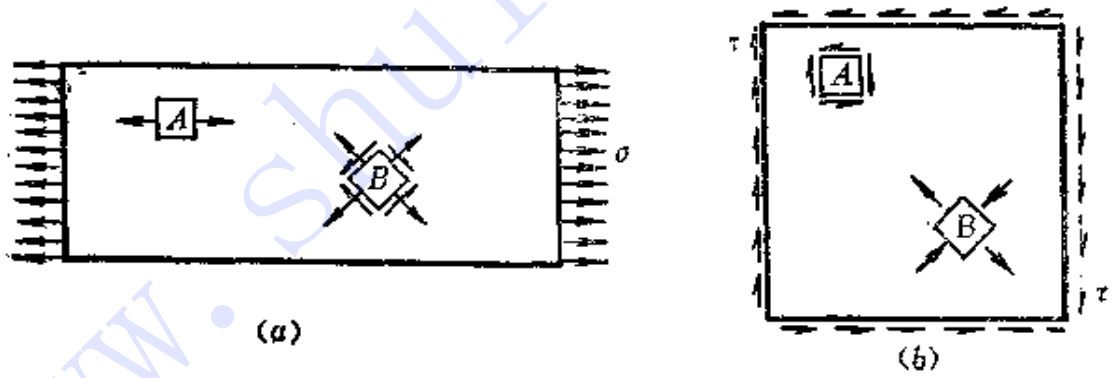
第四章　应力状态和强度理论

4.1　“构件中 A 点的应力等于80MPa”，这样的说法是否恰当？应怎样确切地描述一点的受力情况？

4.2　研究应力状态时，为什么要采用单元体？单元体可以是四面体、五面体、六面体、八面体、十二面体或球体吗？

4.3　单元体两相对截面上的应力有怎样的关系？在讨论构件内应力的分布规律时，要考虑单元体两相对截面间的应力增量；在讨论一点沿不同方向的截面上应力的变化规律时，则可不考虑这个增量。这是什么缘故？

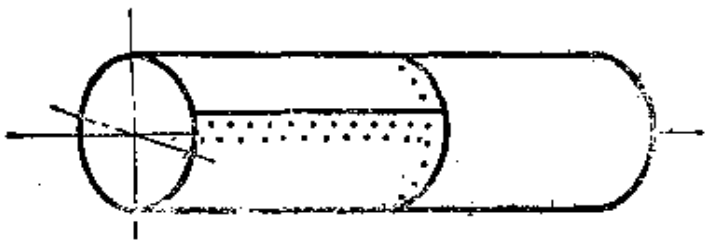
4.4　图示（a）、（b）两构件中，同一构件内 A、B 两点的应力状态是否相同？为什么？



（a）　　（b）

题 4.4 图

4.5　对图示由钢板铆接而成的薄壁圆筒形压力容器，为什么在纵向接缝处单位长度上所需铆钉数要比周向接缝处多？

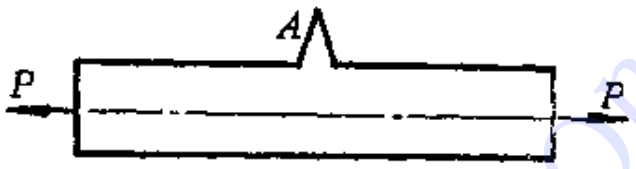


题 4.5 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

4.6 节日里儿童玩的气球中有近似于球形和圆柱形的。如果两者的强度限、厚度和直径均相同，充气时它们的爆破压力是一样的吗？为什么？

4.7 受拉薄板在表面上有一小的突出尖角，如图所示。过尖角顶点 A 各截面上的正应力和剪应力等于多少？



题 4.7 图

*4.8 图示具有V形环向切槽的圆杆受到轴向拉伸，问此时切槽底部附近区域内各点处于什么样的应力状态？

题 4.8 图

4.9 当一实心小钢球在外部迅速加热时，外表和球心各处于什么样的应力状态？

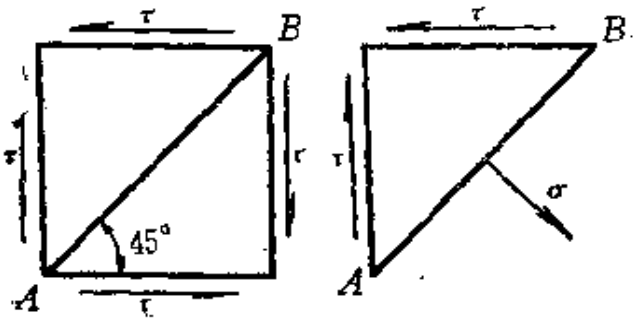
*4.10 圆柱形试件拉伸产生颈缩后，颈缩区域中央是否处于均匀的单向拉伸应力状态？

4.11 由于单元体侧面上的应力是向量，可以用向量相加的方法求合应力。于是，对于图示单元体，截面 AB 上的正应力计算如下：

$$\sigma^2 = \tau^2 + \tau^2,$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{2}\,\tau$$

这样计算对吗？为什么？



题 4.11 图

4.12 主平面上剪应力为零和正应力在数值上达到极值，这两者是必然同时存在的吗？

4.13 已知通过某一点的任意两个垂直于某主平面的斜面

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

（它们互相不垂直，见图）上的正应力和剪应力，可以作出此点的一个二向应力圆吗？怎样作？

题 4.13 图

4.14 在平面应力状态中，若采用倍角公式

$$\operatorname{tg}2\alpha_0=\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

如何判断此平面内最大主应力的方向？

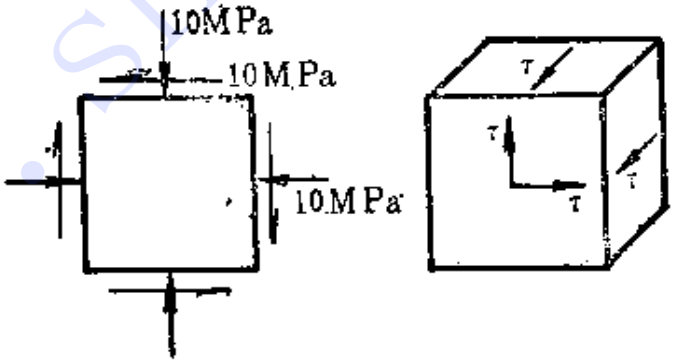
4.15 设$\sigma_x>\sigma_y>0$和$\tau_{xy}>0$，试用应力圆证明第一主平面（即最大主应力σ_1作用的平面）的倾角可用下式确定

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_{min}}=\frac{-\tau_{xy}}{\sigma_{max}-\sigma_y}$$

4.16 剪应力互等定律是否只适用于两个互相垂直的截面上剪应力的关系？在什么情况下，两个互相不垂直的截面上剪应力也是互等？

4.17 通过受力构件的任一点，总可以找到三个主平面，也只能找到三个主平面，它们之间必定互相垂直。对吗？为什么？

4.18 试判断图示两个单元体各是几向应力状态。



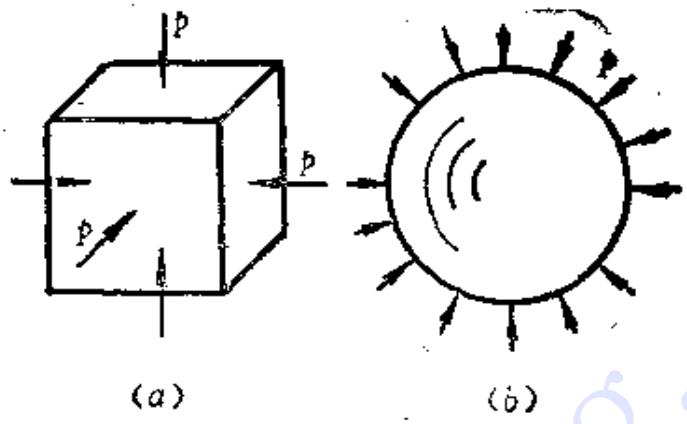
(a) (b)

题 4.18 图

4.19 图示球体和正方体，在整个外表面上都受到均布压力p作用。（1）在两者中各任取一点，这两点的应力状态是否相

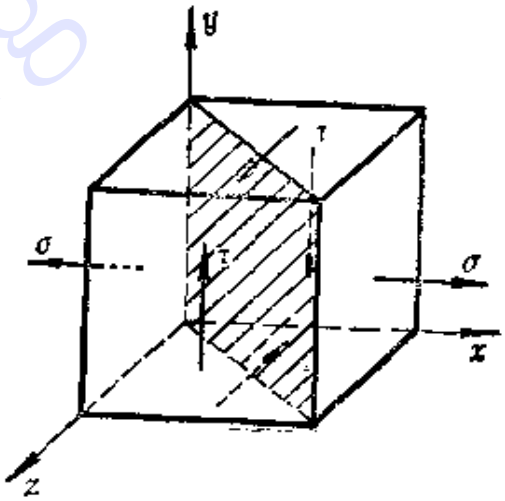
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

同？主应力各有多大？（2）在两者中各取一任意斜截面，两斜截面上的应力是否均匀分布而且大小相同？



题 4.19 图

4.20 一单元体上作用有σ和τ，如图所示。今欲求与y轴平行且与x轴成45°夹角的阴影斜面上的剪应力。由于斜面与y轴平行，所以仅须考虑σ的作用，即看成单向应力状态，于是得该面上剪应力为$\sigma/2$。试问所得结果及其分析方法是否正确？为什么？



题 4.20 图

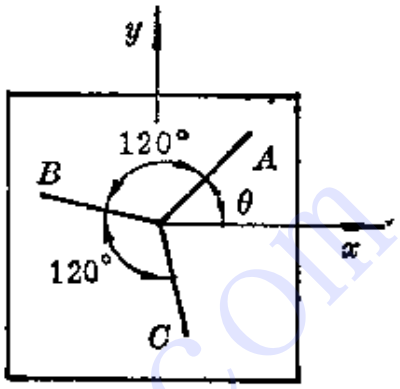
4.21 三向应力圆在什么情况下：（1）成为一个圆；（2）成为一个点圆；（3）成为三个圆。

*4.22 剪应力互等定律是否在任何情况下都成立？你能举出不成立的例子吗？

4.23 在正方形的表面上贴有一电阻应变花，如图所示。假定表示应变花方位的应变片A与x轴的夹角$\theta=45°$。为了校核这一取向，使平板分别只沿x或y方向受同样大小的均匀拉伸作

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

用（即分别为$\sigma_y=0$或$\sigma_x=0$），并测得了应变。对这两者均用ε_1表示较大的主应变。试证明若应变花贴的方位正确，则



题 4.23 图

（1）两种情况下应变片A测出的应变均为

$$\varepsilon_A=\frac{(1-\mu)}{2}\varepsilon_1$$

（2）应变片B测出的应变为

当$\sigma_Y=0$时，

$$\varepsilon_B=\frac{(1-\mu)}{2}\varepsilon_1+\frac{(1+\mu)}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_1$$

当$\sigma_x=0$时，$\varepsilon_B=\frac{(1-\mu)}{2}\varepsilon_1-\frac{(1+\mu)}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_1$

此外，再求出ε_C的相应表达式。

4.24 有一等角应变花由三个单独的应变片组成。在应变花粘贴好之后才发现其中一个应变片拿错了，它的灵敏系数为2.0，其他两片为2.2。但从表面看难于区分，于是决定进行试验。下列应变读数是在应变仪上将灵敏系数定在2.2上读得的：

应变片方向	0°	60°	120°
应变值（$\times10^{-6}$）	+1	−250	+200

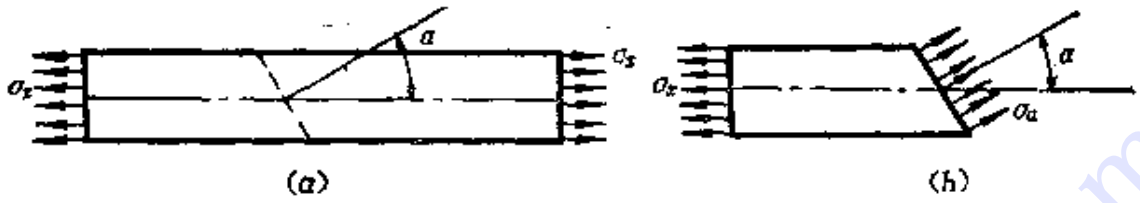
已知试件材料的$\mu=0.3$，$E=207\mathrm{GN/m^2}$，考虑到灵敏系数值的不同，试求这些读数所能表示的最大可能剪应力值。

4.25 单向应力状态是几向应变状态？单向应变状态是几向应力状态？平面应力状态一般是几向应变状态？在什么条件下，平面应力状态同时又是平面应变状态？

4.26 已知图a所示简单拉伸直杆的轴向应变ε_x、应力σ_x、材料的弹性模量E和泊松比μ。为求与轴线成α角方向上的线应变ε_α，用斜面将杆假想切开如图b。由应力分析知$\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha$，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

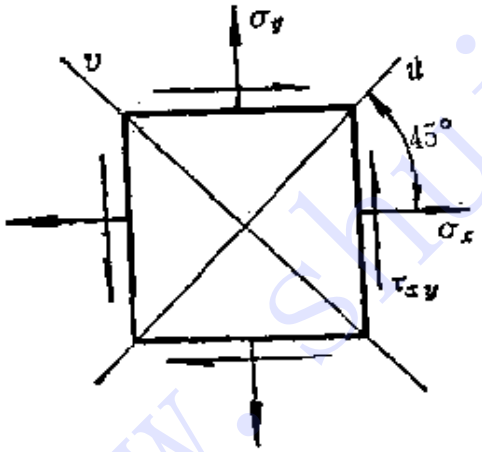
于是由胡克定律$\sigma = E\varepsilon$得$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2\alpha$。试问这样求解对不对？为什么？



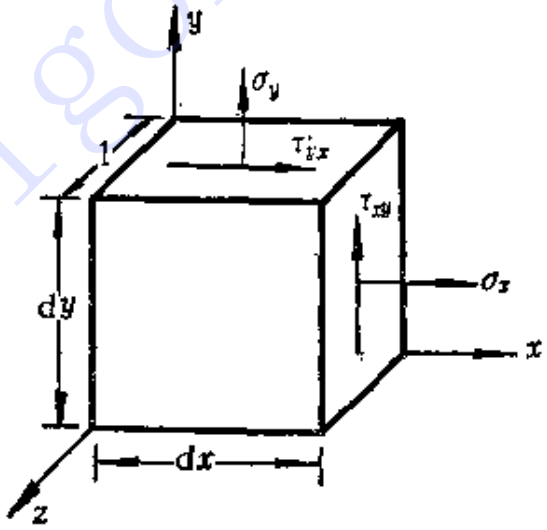
题 4.26 图

4.27 试仿照用应力圆求主应力的方法，用应变圆列出计算主应变的大小和方向的公式。

4.28 图示一平面应力状态的单元体，若已知材料的弹性常数E和μ，问如何写出沿正交轴u和v方向的应变ε_u和ε_v？



题 4.28 图



题 4.29 图

4.29 图示单元体中，τ_{xy}是否会引起z方向的厚度变化？

*4.30 不通过几何关系的分析。试利用广义胡克定律、三个弹性常数的关系和平面应力分析的公式

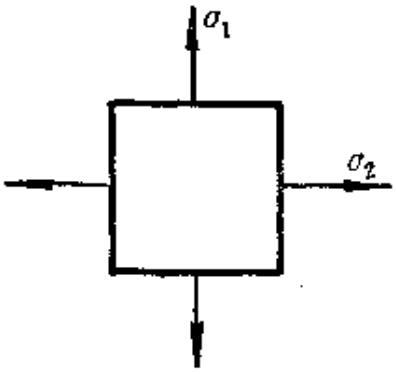
$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

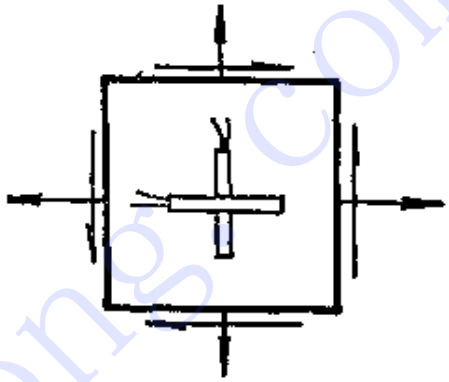
导出应变分析的相应公式

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha$$

4.31 对图示单元体，已知主应变ε_1和ε_2以及材料的弹性常数E和μ。若求得另一主应变$\varepsilon_3 = -\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$，对不对？为什么？



题 4.31 图

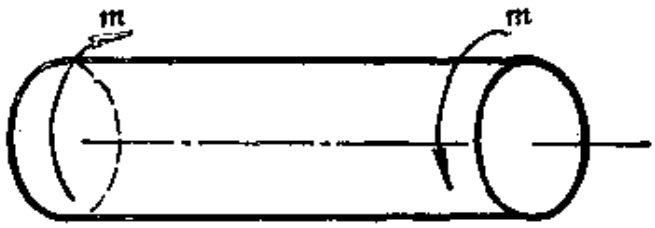


题 4.32 图

4.32 在一受力构件的平坦表面上某点处粘贴两个正交的应变片，如图所示，能否用所测得的应变值求出这两个方向上的正应力？为什么？

4.33 试根据平面假设和广义胡克定律，说明圆轴扭转时横截面上的正应力等于零。

*4.34 现拟用电测法测定图示圆杆所受转矩m的大小。(1)试确定可能的布置电阻应变片和接线的方案，并比较其优缺点。（2）已知杆件材料的弹性常数E和μ，试导出所用几个方案测得的结果与转矩m的关系式。

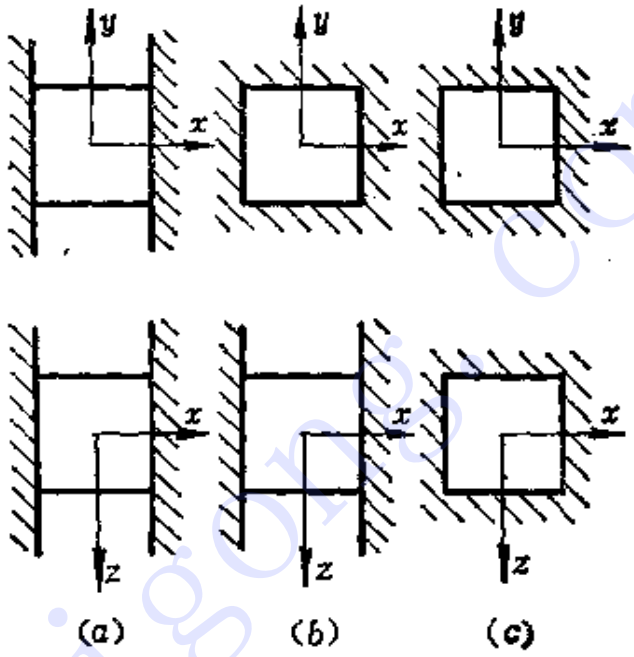


题 4.34 图

4.35 三个相同的立方体金属块处于不同的刚性约束下，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

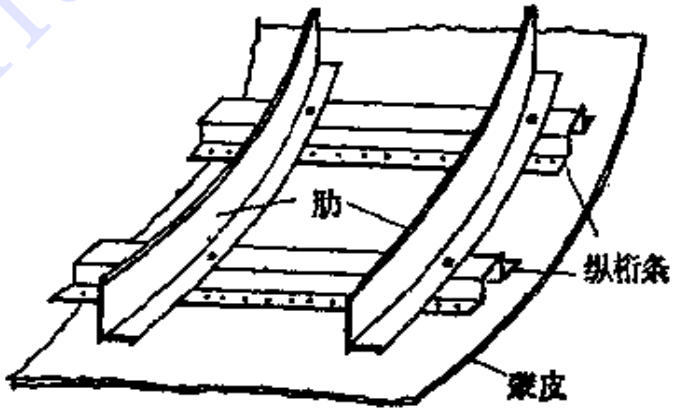
即：图 a 的只在 x 方向受约束，图 b 的在 x 和 y 两个方向受约束，图 c 的在 x、y 和 z 三个方向上全都受约束。当金属块的温度升高后，试比较它们在 x、y 和 z 方向上热应力的大小。



题 4.35 图

*4.36 一飞机机身由纵桁条、圆弧形肋和外蒙皮构成，肋和蒙皮互不接触而通过铆钉与桁条联结，如图所示。当在蒙皮与肋之间装有绝热材料时，蒙皮和桁条的温度会变得与肋的温度很不相同。若蒙皮和桁条冷却到比肋的温度低 Δt 时，问蒙皮中的应力状态如何？

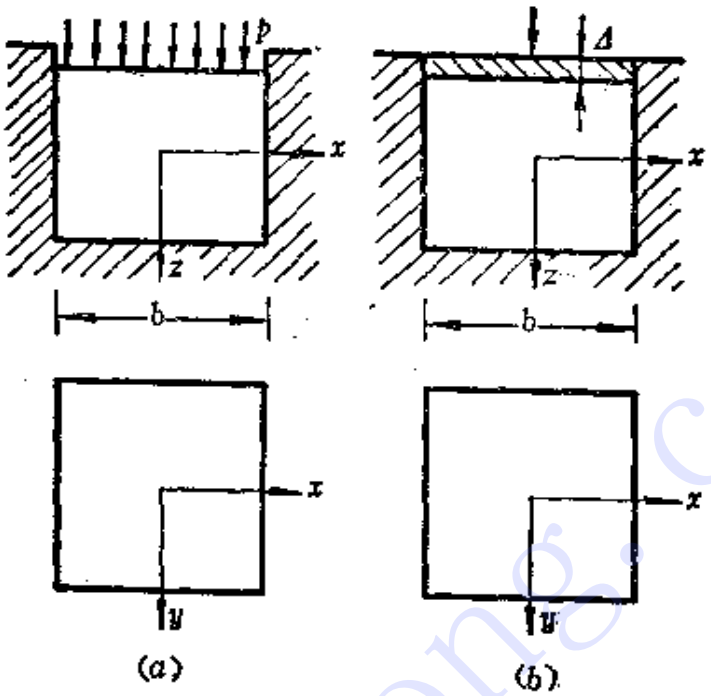
提示：蒙皮沿纵向（即桁条的轴向）可以自由膨胀，但沿横向的膨胀要受到肋的约束。曲率的影响可以略去。可考虑两种极端情况：肋很粗大，蒙皮的横向应变为零；肋很单薄，蒙皮的横向应变不受约束。



题 4.36 图

4.37 正方形盲孔的刚模如图所示，当沿 z 方向施加均布压力 p（图 a）或施加均匀位移 Δ（图 b）时，模内的物体（其弹性常数为 E 和 μ）的应力和应变状态如何（略去物体与模壁的摩擦作用）？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 4.37 图

4.38 有一等厚薄壁圆筒，两端承受扭矩M_e。若材料在拉伸和压缩时的弹性模量和泊松比各不相等（分别为E_1、μ_1和E_2、μ_2），问扭转时圆筒沿轴向有没有线应变？为什么？

4.39 对于一个单元体，在什么情况下只产生体积改变？在什么情况下只产生形状改变？圆轴扭转时，它的体积有没有变化？

4.40 对比几种典型材料在拉伸、压缩和扭转时的破坏形式，并从宏观上分析其破坏的主要原因。

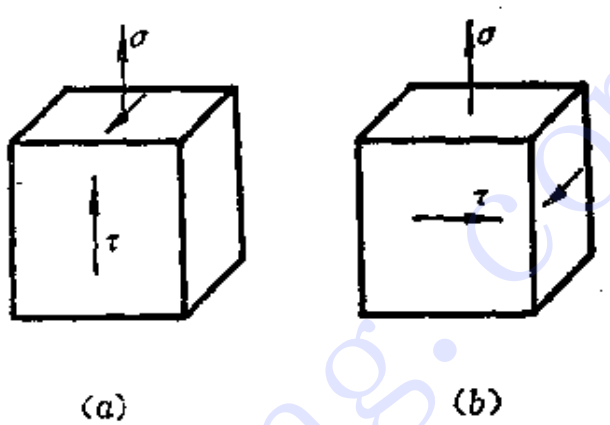
4.41 低碳钢的屈服，硬铝在拉伸和压缩时沿斜面断裂，灰铸铁压缩时沿斜面断裂，都主要是由于剪应力作用的结果。但这些材料的杆件受拉伸和压缩时，其强度条件却用正应力表示。反之，灰铸铁圆杆扭转时沿螺旋面拉断，而强度条件则用剪应力表示。这样是否能保证安全？为什么？

4.42 最大拉应变理论和形状改变比能理论，在建立以主应力表示的强度条件的过程中，用到了广义胡克定律或弹性应变能

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

的公式。是否这两个理论只适用于线弹性材料或线弹性范围？为什么？

4.43 试直接根据形状改变比能的概念，判断图中所示两个塑性材料的单元体哪个较容易发生塑性流动。



题 4.43 图

4.44 有人提出最大剪应变理论。试仿效四个古典强度理论建立强度条件的方法，导出此理论的强度条件。这个结果与四个古典强度理论中的哪一个有什么样的关系？为什么？

4.45 有人提出变体积比能理论。试仿效四个古典强度理论建立强度条件的方法，导出此理论的强度条件。并根据你所知道的试验结果，分析此理论是否与实际符合。

4.46 强度理论中相当应力（或称计算应力）的意义是什么？它相当于怎样的应力？是否真有这样的应力存在？

4.47 当材料处于单向应力状态时，按各种强度理论计算所得的相当应力是否相同？为什么？

4.48 在什么情况下，各种强度理论的相当应力之间存在下列等价关系（σ_{xdM} 表示莫尔理论的相当应力）：

（1）$\sigma_{xd1}=\sigma_{xd2}=\sigma_{xd3}=\sigma_{xd4}=\sigma_{xdM}$

（2）$\sigma_{xd3}=\sigma_{xdM}$

（3）$\sigma_{xd1}=\sigma_{xd3}=\sigma_{xdM}$

（4）$\sigma_{xd2}=\sigma_{xdM}$

上列各等价关系分别说明什么问题（是表示其内在联系，还是一种巧合，或是其他什么意思）？

*4.49 如果保持σ_1和σ_3（$\sigma_1\neq\sigma_3$）的值不变，问σ_2为多大

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

时，第三强度理论的相当应力值与第四强度理论的相等？又当σ_2为多大时，两个理论的相当应力值相差最大？在后一情况下，第三强度理论对材料的强度低估了百分之几？

4.50 一低碳钢实心圆轴在纯弯矩M作用下刚好开始屈服。现有另一相同的轴受扭矩M_n作用，按第一和第三强度理论计算出使轴刚好开始屈服的扭矩值分别是2 M和M。你认为哪一个值可靠？为什么？

4.51 根据布利治门（P. W. Bridgman）的试验，在三向均匀压缩的情况下，将七万个大气压力加到冰块上，并未造成破裂。四个古典强度理论和莫尔强度理论与这个试验是否符合？

4.52 根据洛德（W. Lode）的试验，在复杂应力下，塑性材料开始屈服时，比值$(\sigma_1-\sigma_3)/\sigma_s$受各种不同$\sigma_2$值的影响一般不等于1；当$\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$时，比值$(\sigma_1-\sigma_3)/\sigma_s$达最大值$\sqrt{4/3}$。试用第四强度理论加以解释。

4.53 格斯特（J. J. Guest）用钢或铜的薄壁管做试验，在两端加拉力，同时管内受油压高达10MPa，并测定其应力和伸长。结果表示，当达到弹性限时，虽然σ_{max}和ε_{max}可以有各种不同的数值，但$\sigma_3-\sigma_1$的值则近似保持不变。哪一个强度理论与这个试验结果最相符合？

4.54 弗普尔（A. Föppl）用水泥砂浆（一份水泥、三份砂）、砂岩和花岗岩做压缩试验，得到强度限的数据（以MPa计）如表所示。第二强度理论与这些试验结果相符合吗？

材　　料	单向压缩	单向压缩（有润滑剂）	二向等值压缩（有润滑剂）
水泥砂浆	24.7	13.8	14.7
砂　岩	62.4	24.9	24.8
花岗岩	146	40.7	45.2

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

4.55 将沸水迅速倒入厚玻璃杯中，杯内、外壁的受力情况如何？若因此而产生破裂，裂缝是从内壁还是从外壁开始？为什么？

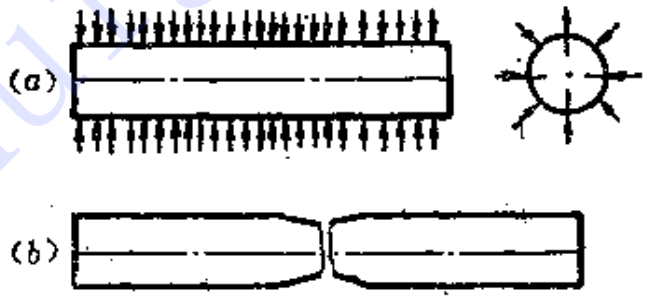
4.56 自来水管在冬天会因管内结冰而破裂。是否因冰的强度要比水管的强度高？怎样解释这种现象？

4.57 由碳钢制成的螺栓受拉伸时，在螺纹根部会出现脆性断裂；灰铸铁板在淬火钢球压力下，铁板在接触点处会出现明显的凹坑。试解释上述两种现象。

4.58 钢制薄壁圆筒承受内压时会出现纵向裂缝。试分析裂口的形状和沿厚度的开裂方向及其破裂原因。

4.59 用石料或混凝土立方体试块作单向压缩试验时，如果试块沿纵截面破裂，用哪个强度理论解释比较合适？从宏观看这种破坏是否由最大拉应力引起的呢？

4.60 图a表示某种塑性材料制成的圆棒试样，在侧表面受均匀压力作用而两端面不受力。当压力很大时就会发生图b所示因颈缩而破坏。试解释这种现象。



题 4.60 图

4.61 处于三向等值的拉伸或压缩的应力状态时，低碳钢会不会产生塑性流动？这时应采用哪一个强度理论？

4.62 虽然通常将材料划分为塑性材料和脆性材料，但更确切地说，应是在某种条件下材料表现为塑性状态或脆性状态。试举例说明：在什么条件下，通常所讲的塑性材料会产生脆性断裂；在什么条件下，通常所讲的脆性材料会产生塑性流动。

*4.63 当材料的拉伸强度与压缩强度不相等时，如何修正第一和第二强度理论以适用于这样的材料？

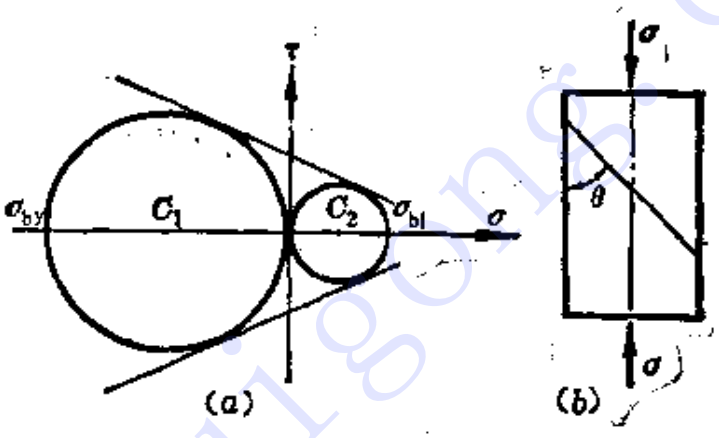
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*4.64 圆柱形灰铸铁试件受轴向压缩时，试用莫尔强度理论定性地推断其断裂面的法线与轴线的夹角是约等于45°，还是大于或小于45°。

4.65 如何利用图a所示莫尔强度理论的简化极限曲线，来推导灰铸铁压缩时破坏斜面的角度θ（图b）的计算公式：

$$\theta=\frac{1}{2}\ \text{arc}\ \cos\frac{\sigma_{by}-\sigma_{bl}}{\sigma_{by}+\sigma_{bl}}$$

式中σ_{bl}和σ_{by}分别为拉伸和压缩的强度限。



题 4.65 图

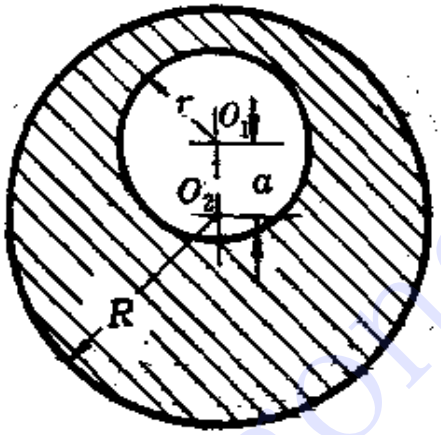
4.66 在应用莫尔强度理论时，是否先要区分材料的破坏类型是属于塑性流动还是脆性断裂或剪断？四个古典强度理论是否也要这样做？

4.67 若用第一强度理论校核可能发生脆性断裂的低碳钢构件，其[σ]怎样确定？若用莫尔强度理论校核可能发生剪断的铸铁构件，其[σ]又怎样确定？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第五章　平面图形的几何性质

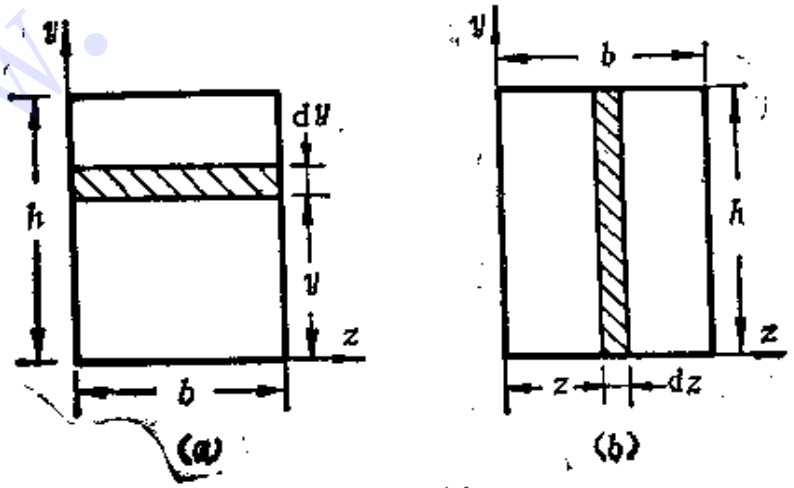
5.1　对于图示的空心截面，如何简便地求出其形心位置？



题　5.1　图

5.2　矩形截面对z轴的惯矩，用图a和b两种方法分别计算如下：

$$(1)\ I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_0^h y^2 b\mathrm{d}y=\frac{bh^3}{3}$$



题　5.2　图

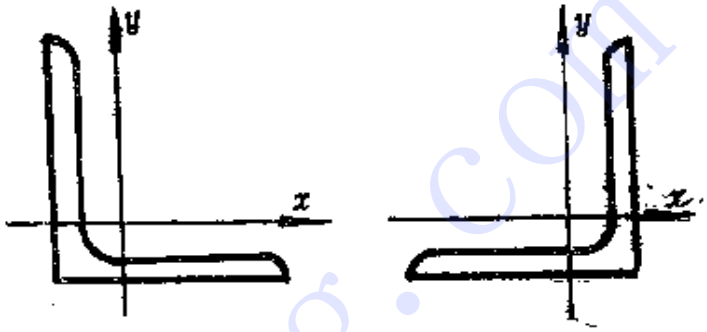
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$(2)\quad I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_0^h\left(\frac{h}{2}\right)^2 h\mathrm{d}z=\frac{bh^3}{4}$$

哪一个结果是不对的？为什么？

5.3 平面图形对于怎样的轴，其面积矩（静矩）等于零；惯积等于零。

5.4 试判断图示两种情况下等边角钢截面的惯积 I_{xy} 的正负号。



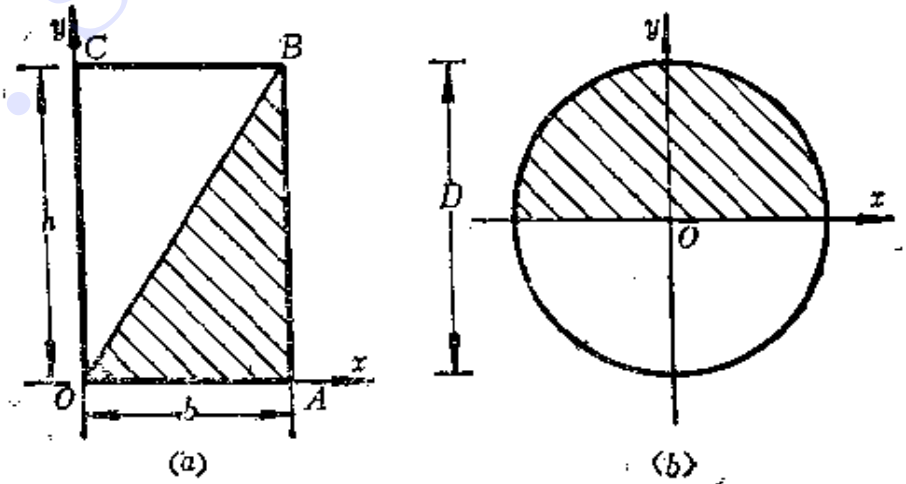
(a) (b)

题 5.4 图

5.5 对于图示三角形和半圆形截面，试指出下列各项运算中哪些是正确的，哪些是错误的。

$$(1)\quad I_{x(OAB)}=\frac{1}{2}I_{x(OABC)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{bh^3}{3}$$

$$(2)\quad I_{xy(OAB)}=\frac{1}{2}I_{xy(OABC)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2h^2}{4}$$



(a) (b)

题 5.5 图

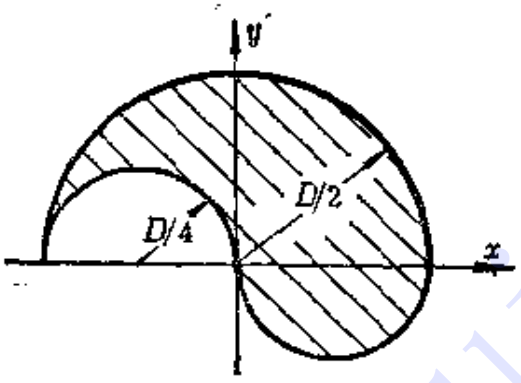
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

（3）$I_{x半圆}=\frac{1}{2}I_{x圆}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi D^4}{64}$

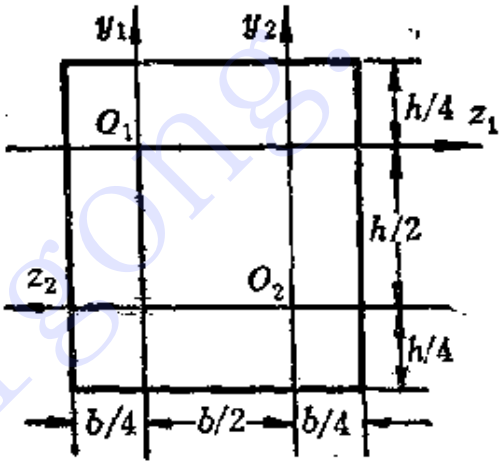
（4）$I_{xy半圆}=\frac{1}{2}I_{xy圆}$

（5）$I_{y半圆}=\frac{1}{2}I_{y圆}$

5.6 试用最简便的方法得出图示截面对y和z轴的惯矩和惯积。



题 5.6 图



题 5.8 图

*5.7 一平面图形可以对无限多的点具有同样大小的极惯矩。试问这些点将连成怎样的曲线？

5.8 对于图示的矩形和坐标轴，有下列的结果：

（1）$S_{y_1}=S_{y_2}=b^2h/4$；

（2）$S_{z_1}=S_{z_2}=bh^2/4$；

（3）$I_{y_1}=I_{y_2}=7b^3h/48$；

（4）$I_{z_1}=I_{z_2}=7bh^3/48$；

（5）$I_{y_1z_1}=I_{y_2z_2}=-b^2h^2/16$

试指出哪些是正确的，哪些有什么样的错误。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

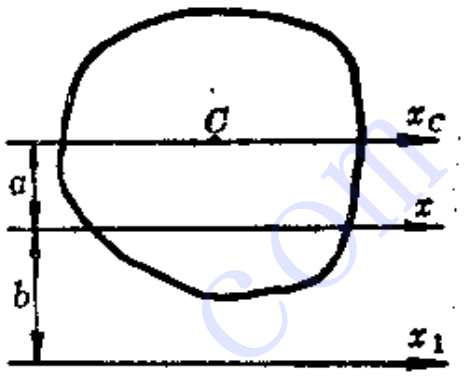
5.9 已知图示面积为A的图形对x轴的惯矩I_x，形心在C处，x_c、x和x_1三根轴相互平行。为求图形对x_1轴的惯矩，应选用下列的哪一个式子计算？

（1）$I_{x_1}=I_x+b^2A$；

（2）$I_{x_1}=I_x+a^2A$；

（3）$I_{x_1}=I_x+(a+b)^2A$；

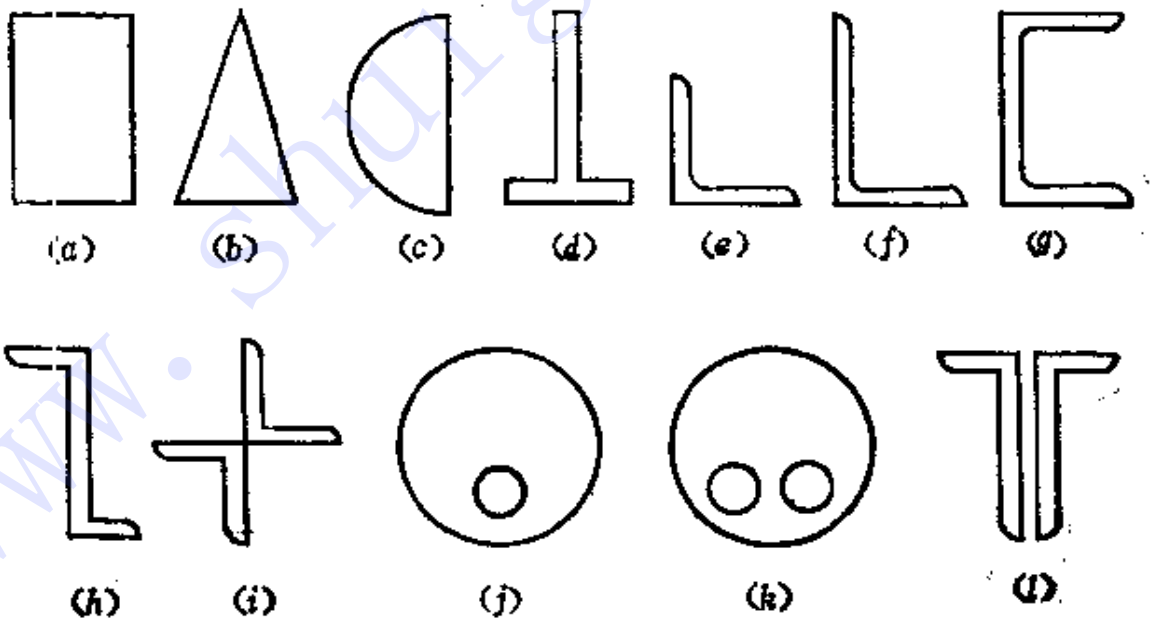
（4）$I_{x_1}=I_x+b^2A+2abA$。



题 5.9 图

5.10 平面图形的形心轴、对称轴和主轴之间有什么区别和联系？主轴都通过形心吗？对称轴一定是形心主轴吗？对称图形的形心主轴必须是对称轴吗？

5.11 试判断图中所示各种图形的形心主轴的位置，并指出对哪一形心轴的惯矩最大。其中图e和i为等边角钢，图j和k为带有小圆孔的圆形。



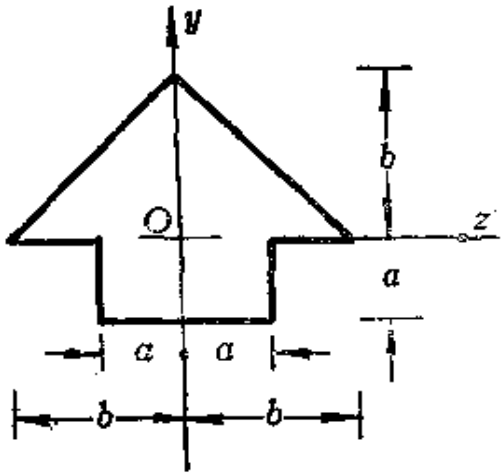
题 5.11 图

5.12 对所示图形，当尺寸a和b的关系为任意时，试指出过

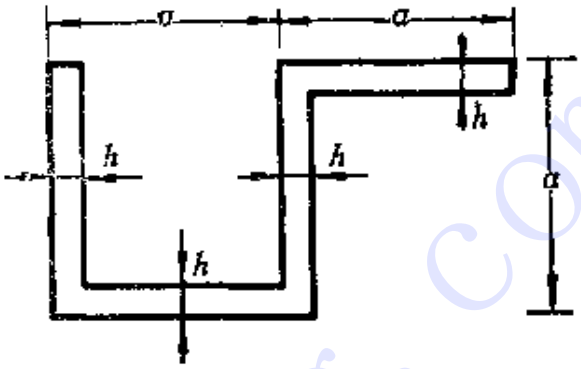
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

O点的全部主轴。

5.13 对于所示图形，你能定性地指出它的形心和形心主轴的位置吗？



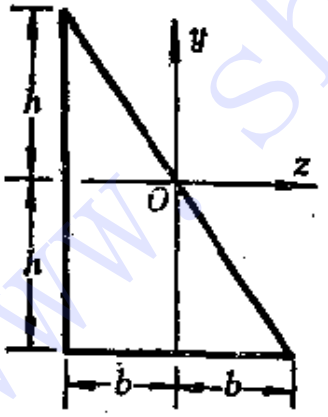
题 5.12 图



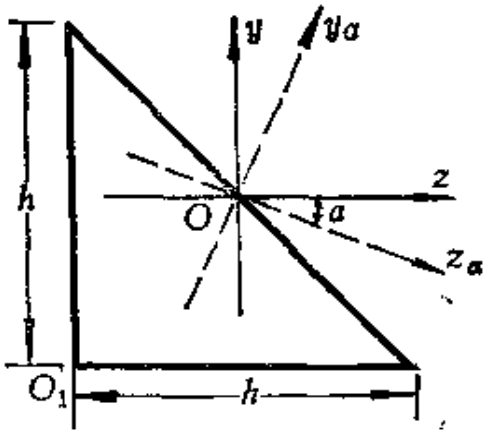
题 5.13 图

5.14 为什么说，如果平面图形过一点有两对以上的主轴，则过该点的任一对正交轴都是主轴？

5.15 对于图示直角三角形，试用推理的方法说明，过弦中点O且平行于两直角边的z和y轴就是主轴。



题 5.15 图



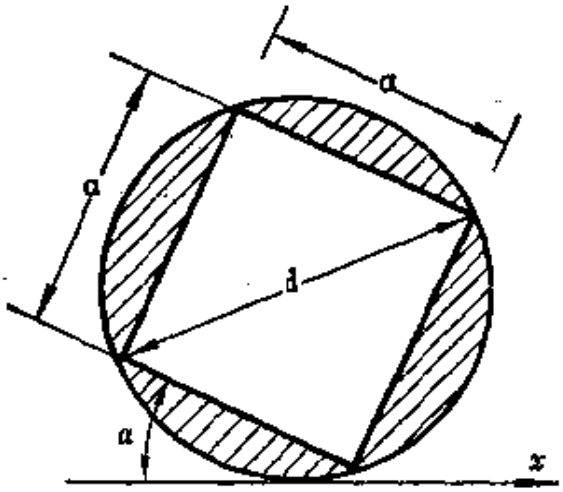
题 5.16 图

5.16 对于图示等腰直角三角形，试用推理的方法说明过弦中点O的任一对正交轴z_α和y_α都是主轴。

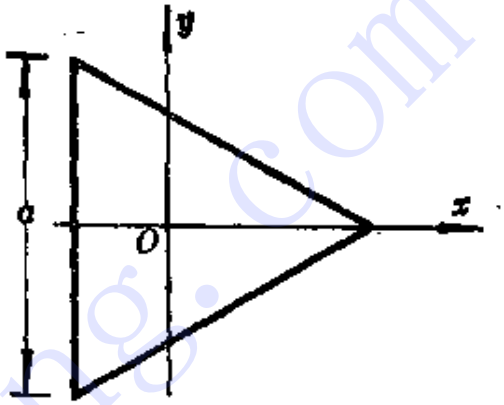
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*5.17 如何用最简捷的方法写出图示截面对x轴的惯矩I_x?

*5.18 图示等边三角形的形心在O点，已知它对于对称轴x的惯矩$I_x=\sqrt{3}a^4/96$，试不作计算而直接写出它对于y轴(与x轴垂直）的惯矩I_y。



题 5.17 图



题 5.18 图

*5.19 试将转轴公式中的参变量θ消去，得出一个包括两个变量I_{x_1}和$I_{x_1y_1}$的方程。将这个方程与应力分析的莫尔圆方程相比较，看从中可以得到什么有用的结果。

5.20 一般来说，平面图形具有一对相互垂直的形心主轴，但等边三角形、正方形等正多边形和圆形却属例外，为什么？它们的惯矩圆（莫尔圆）有何特点？这种情况与应力分析中的什么应力状态有某种相类似之处？

5.21 由$\operatorname{tg}2\alpha_0=-\dfrac{2I_{xy}}{I_x-I_y}$计算出的$\alpha_0$有两个值，如何简捷地确定出哪一个角对应于最大惯矩的主轴？试利用惯矩圆导出下式：

$$\operatorname{tg}\alpha_0=-\frac{I_{xy}}{I_x-I_{min}}=-\frac{I_{xy}}{I_{max}-I_y}$$

由此式算出的α_0，就是对应于I_{max}的主轴的，不必鉴别。

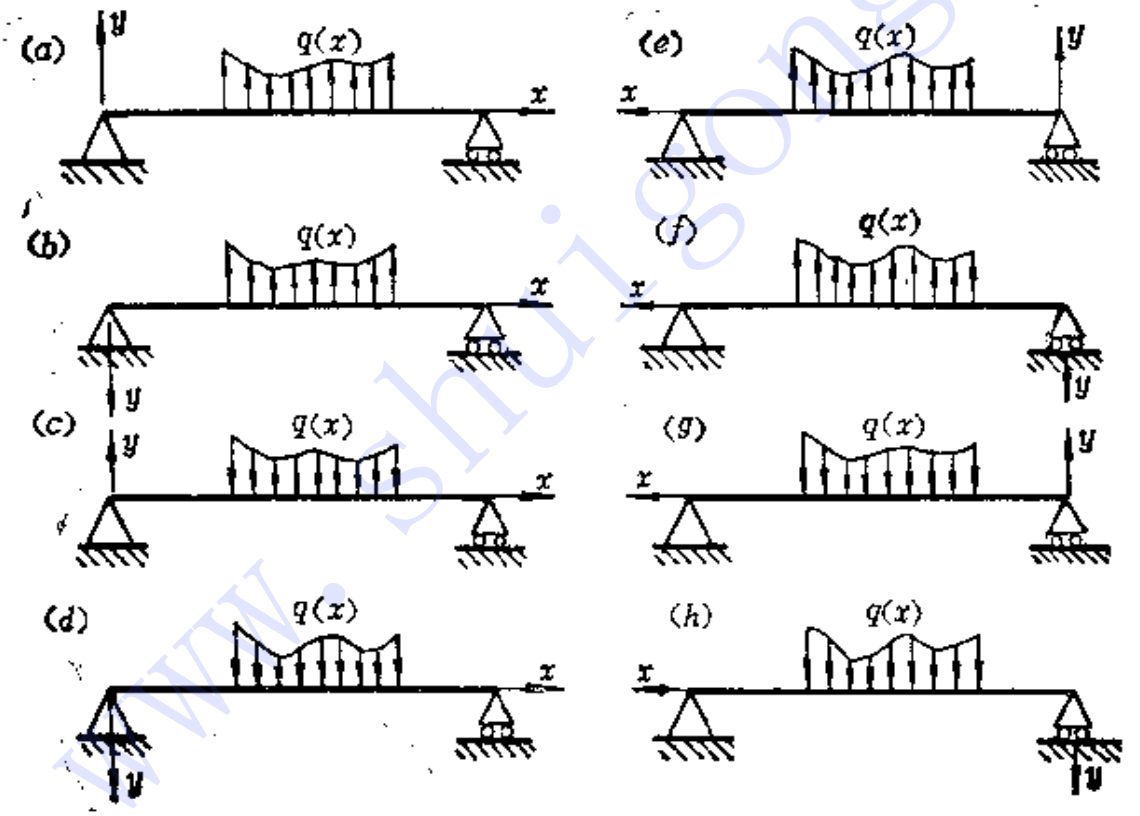
5.22 试将转轴公式写成矩阵形式。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第六章　弯　　曲

第一节　内　　力

*6.1　剪力、弯矩与载荷集度三者之间的微分关系是如何建立的？其物理意义和几何意义是什么？在建立上述关系时，载荷集度与坐标轴的取向有何联系？图示几种情形所推出的微分关系是否相同？为什么？



题 6.1 图

6.2　梁上载荷较复杂时，若q、Q与M之间分段存在着微分关系，那么在载荷突变处是否也存在微分关系？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

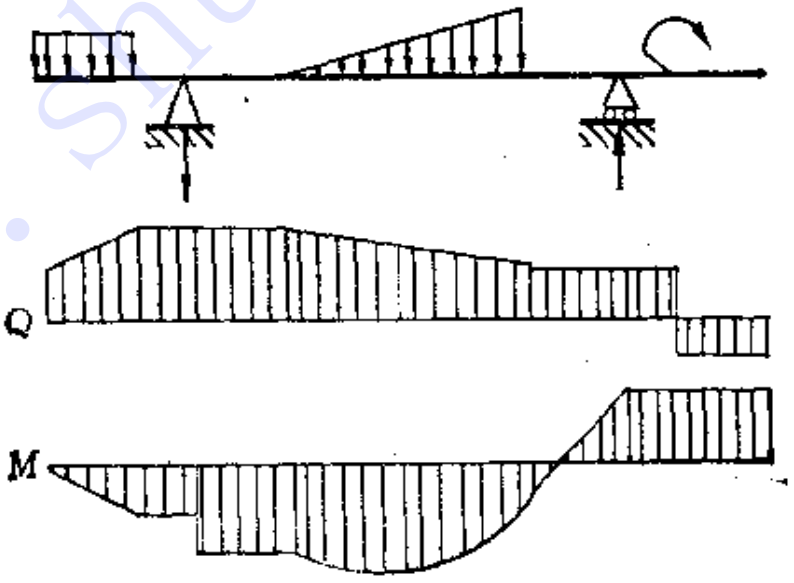
*6.3 试利用q、Q与M之间的微分关系，推导出某段梁的左、右两端截面间q、Q与M之间的积分关系。若用这些关系指导画内力图，试指出依次排列的q、Q与M图之间在几何上有哪些规律可循。

6.4 如何计算非均布载荷的合力？如何简便而正确地绘制非均布载荷作用下梁的剪力图和弯矩图？在非均布载荷作用区域的始点和终点，剪力图和弯矩图上呈现哪些特征？

6.5 在梁上如何确定弯矩图有极值的截面位置？弯矩图上的极值弯矩是否就是梁内的最大弯矩？在梁上弯矩由正（或负）到负（或正）的过渡点称为反弯点，问如何确定反弯点的位置？

6.6 如果在梁的简支端、中间铰、自由端和中间支座等地方，有或者没有集中力偶作用时，你能否直接判断其截面上的弯矩？

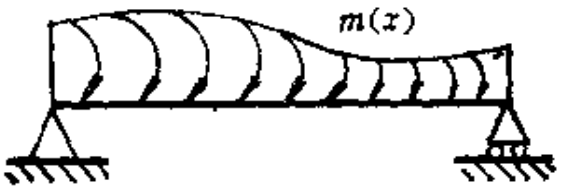
6.7 根据q、Q与M三者的微分和积分关系，你能对已绘制出的内力图作出正确的判断吗？以图示的梁为例，试定性地指出Q、M图中的错误。



题 6.7 图

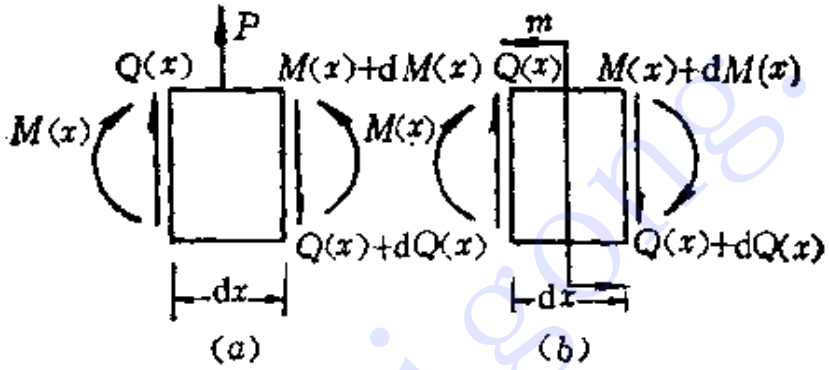
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*6.8 图示梁因承受分布力偶作用而产生弯曲变形，试问梁上分布力偶集度 $m(x)$ 与梁的内力 $Q(x)$、$M(x)$ 之间存在什么关系？如何推导这种关系？



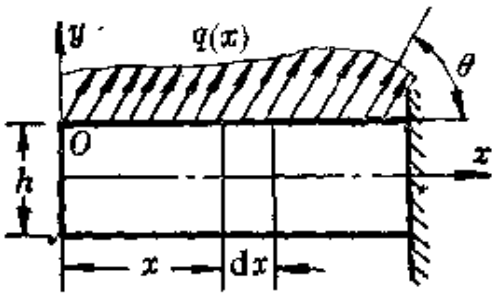
题 6.8 图

6.9 如图所示，微梁段上作用有集中力 P 或集中力偶 m，试推导这两种情况下载荷、剪力与弯矩三者之间的关系。



题 6.9 图

*6.10 图示一直梁，其上的分布力不垂直于轴线 x，试考察梁在微段 dx 上诸内力素与分布载荷间的微分关系。若将直梁改为曲梁，分布力与轴线夹角仍为 θ，这种关系又如何？



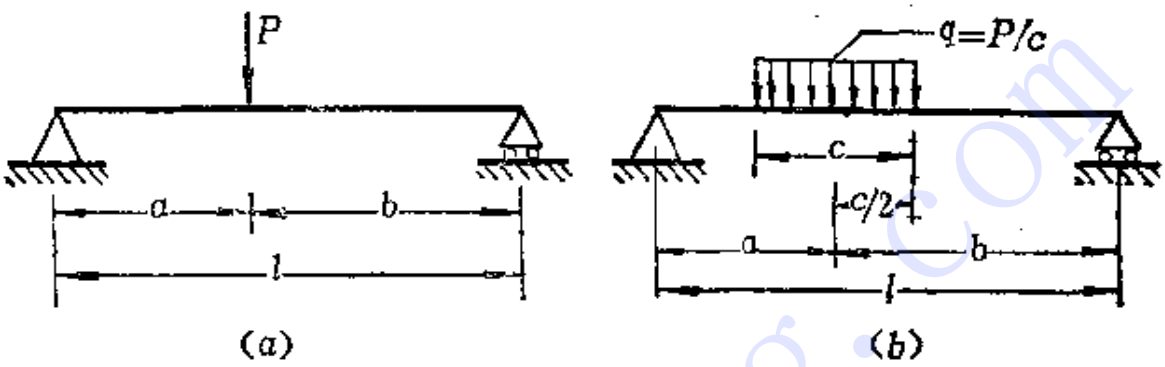
题 6.10 图

6.11 建筑工地上脚手架的跳板两端自由支承，可视为一简支梁。其上堆置总重量为 P 的砌砖，若将砖平均摊开或集中堆放在板中，问何者的最大剪力和最大弯矩要大些？在计算支反力时为什么两者都可将砖的总重量作为集中载荷作用于跨中考虑，而求内力时，在使用截面法前不能将分布外力作为集中力考虑，只在截开后才又可以看成集

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

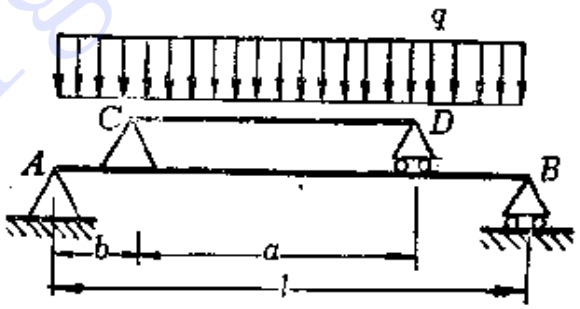
中力呢？

6.12 图示两梁长度相同，其上作用的载荷总量均为P，试比较它们的剪力和弯矩的分布有何异同。



题 6.12 图

6.13 一承受均布载荷的简支梁，发现其上的弯矩比较大，有人建议加上一根辅助梁，就可以使最大弯矩减小。其效果如何，你比较一下看。如图所示，已知l、a、b和q，问在辅助梁CD的跨中弯矩为多大？原始梁AB在相应的位置上弯矩减小了多少？



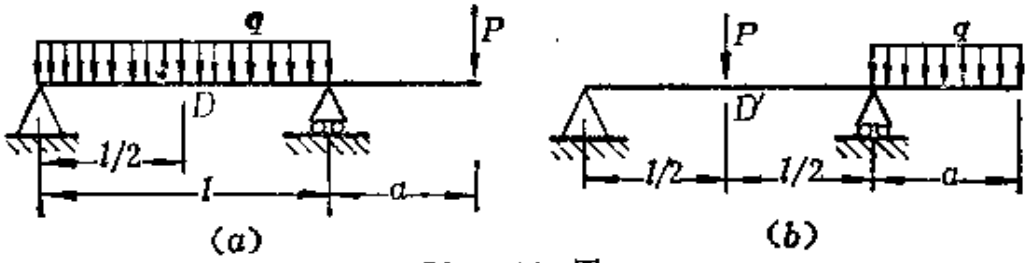
题 6.13 图

6.14 如图所示的两外伸梁，跨中D点的弯矩可用叠加原理直接写出如下：

$$M_D=\frac{ql^2}{8}-\frac{Pa}{2},\quad M_D'=\frac{Pl}{4}-\frac{qa^2}{4}$$

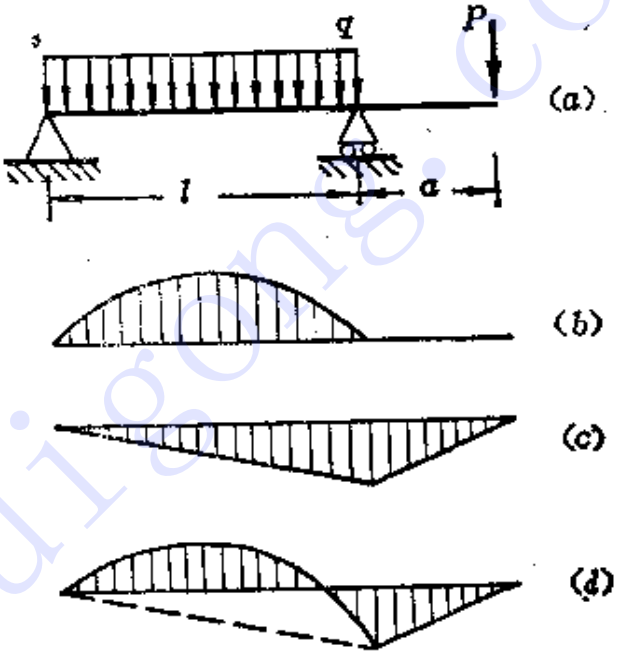
试解释为什么是这样。若$M_D>0$，$M_D'>0$，它们分别是两梁的最大弯矩吗？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



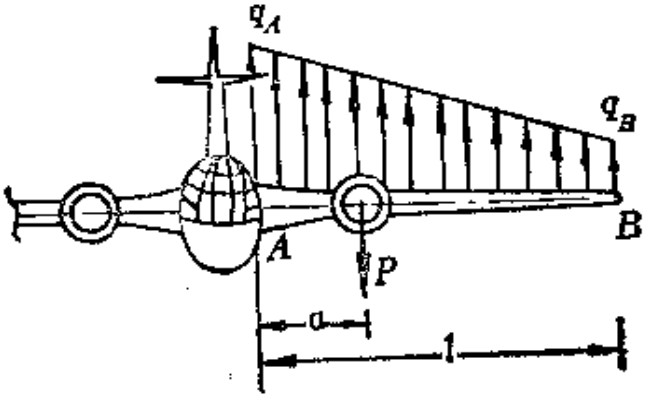
题 6.14 图

6.15 在库房里欲将一批金属制品放置在一条长木板上，工人先将木板两端放在垫块上，然后堆放制品。当均匀地堆放部分制品时，木板已明显变弯了。你能否改变一下垫块的位置，使铺满制品时木板不产生过分的弯曲？并指出垫块摆在什么位置时最合理（最大弯矩达最小值）。



题 6.16 图

6.16 人们常常利用叠加法迅速画出梁在复杂载荷作用下的弯矩图，比如由图b与c叠加得图d。有人注意到图b的抛物线以水平线为基线，而图d的抛物线则以斜线为基线，于是提出了两者的弯矩是否一致的问题。你怎样来回答他呢？



题 6.17 图

6.17 飞机在水平直线飞行时，机翼承受

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

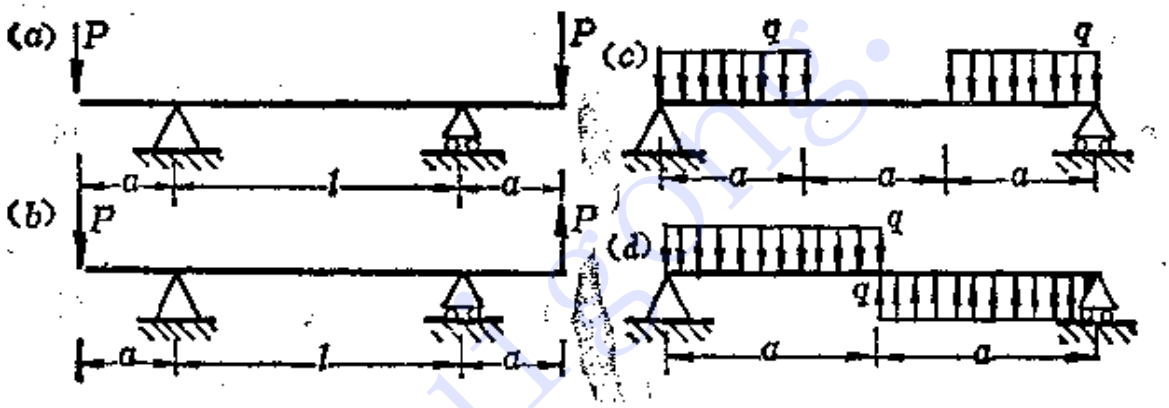
发动机重力和气动力作用，后者简化成梯形分布，如图所示。问机翼可简化为何种受力模型？如何绘制机翼的内力图？

6.18 试从图示诸梁的载荷特点，回答下列问题：

（1）若结构对称，载荷也对称，在Q、M图上各有什么特点？

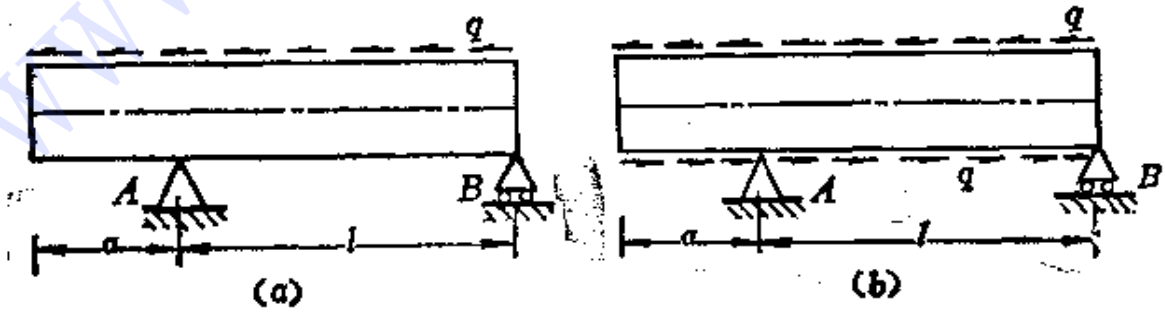
（2）若结构对称，载荷反对称，在Q、M图上又各有什么特点？

（3）在以上两种情况下，对称面上的Q和M值是否等于零？



题 6.18 图

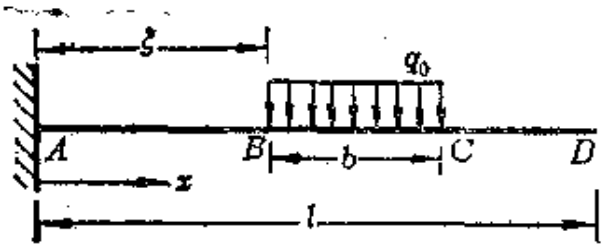
6.19 如果图示两外伸梁上作用的分布载与上、下表面相切并平行于梁的轴线，那么在任意横截面上将产生哪些内力素？它们沿轴线的分布规律有何内在联系？若A、B两支座互换，将对各内力素有什么影响？



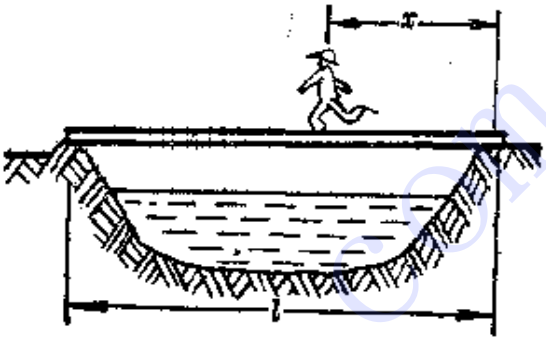
题 6.19 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*6.20 在悬臂梁上有一段均布的移动载荷，距固定端的距离以变量ξ表示，如图所示。如何写出对于AB、BC和CD各段通用的弯矩方程。



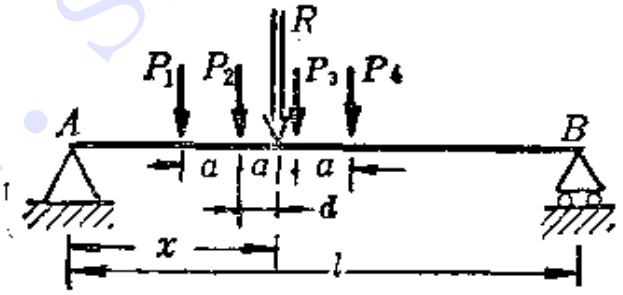
题 6.20 图



题 6.21 图

6.21 一个体重为P的人，试图走过两端简单搁置在河两岸的木板便桥，如图所示。只要板内最大弯矩超过板材所能承受的弯矩M_{max}，桥板就会断开。试问当人走到何处（即x为何值）时会有板断人堕河中的危险？

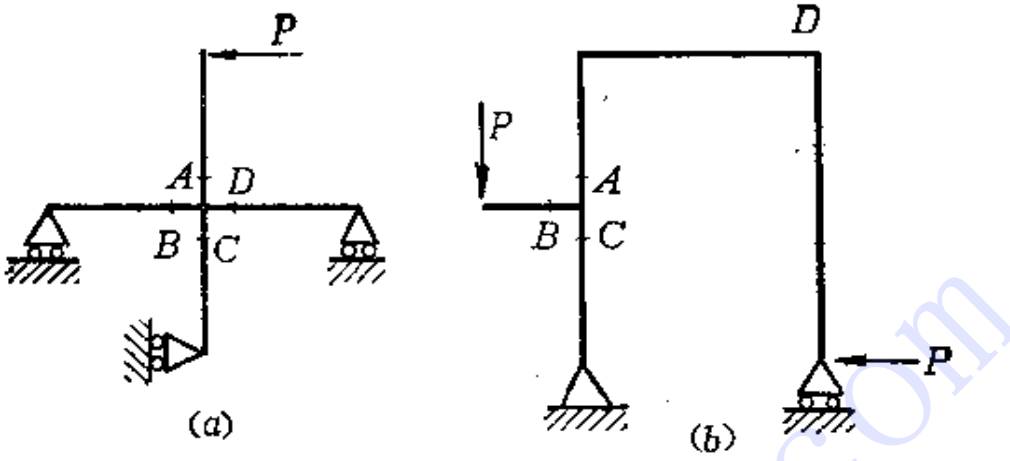
6.22 有一组等间距的集中载荷P_1、P_2、P_3和P_4在一简支梁上移动，如图所示。问这组力移动到什么位置时梁内产生的弯矩为最大？若将各载荷的合力记作R，此时R离左支座有多远？



题 6.22 图

6.23 刚架中对任意截面的内力分析和计算，与梁有何异同？试判断图示两刚架在A、B、C和D等截面上的弯矩方向和剪力的正负。

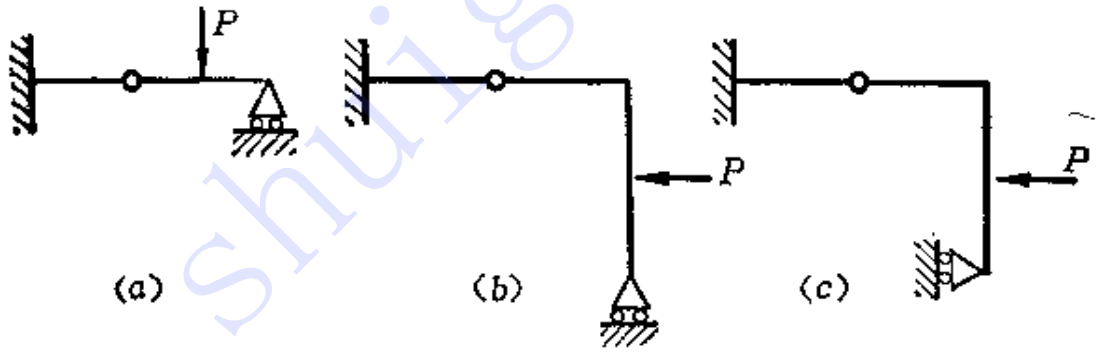
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 6.23 图

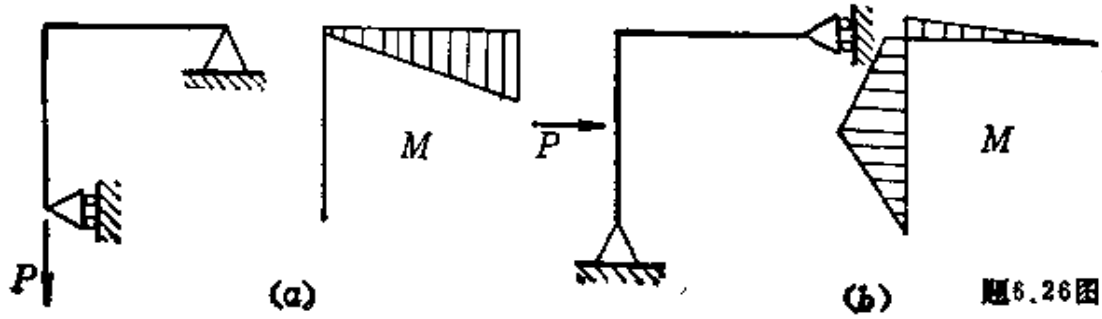
6.24 平面刚架节点两侧的内力、变形之间各有什么联系？节点上有集中力或集中力偶作用时又如何？两相连杆件在节点处的夹角（直角的和非直角的）对这种联系有无影响？

6.25 带中间铰的梁和刚架，中间铰处的内力有何特点？根据你对中间铰性质的理解，示意画出图中梁和刚架的弯矩图。



题 6.25 图

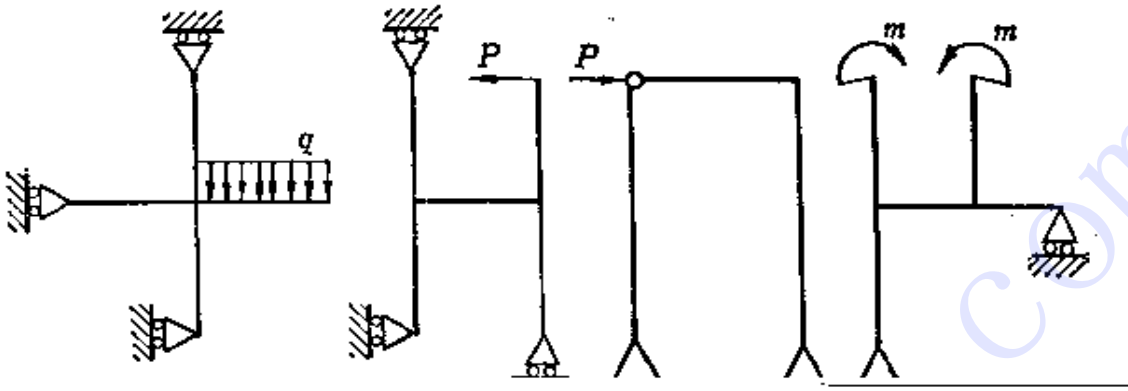
6.26 刚架的支承和受力如图，有人画出了它们的弯矩图如图示，试判断其对不对，并说明理由。



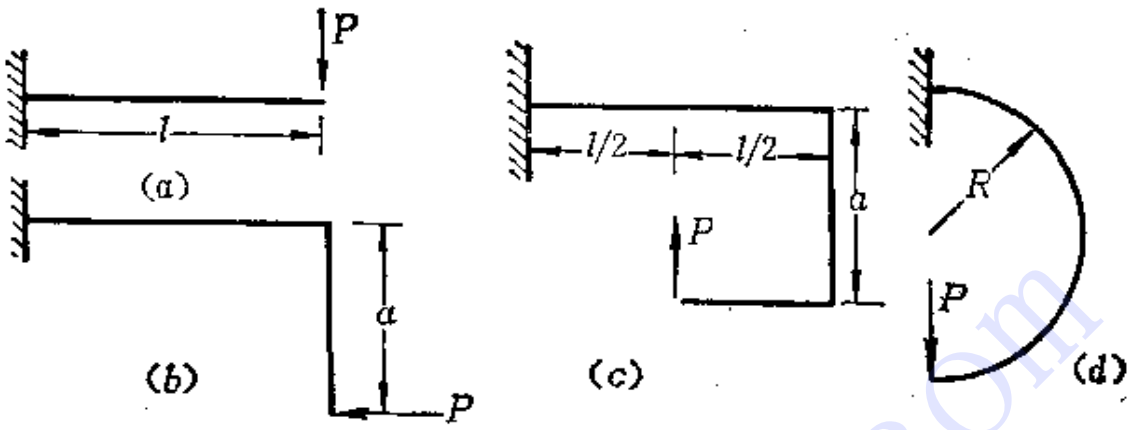
题6.26图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.27 对于图示各平面刚架，不经过计算，你就能正确指出支反力的方向和画出弯矩图吗？

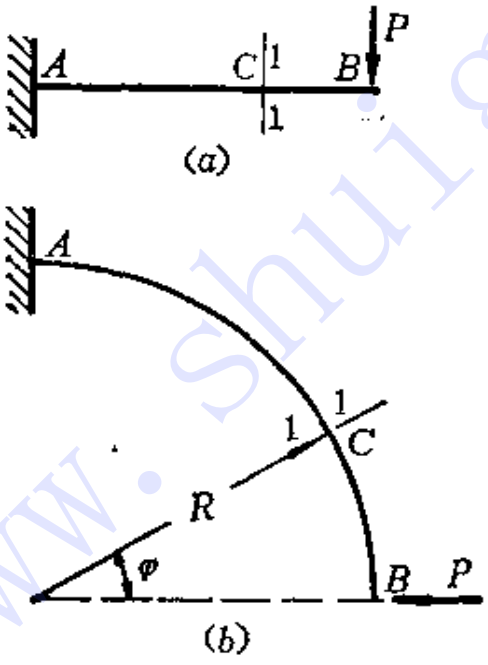


由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

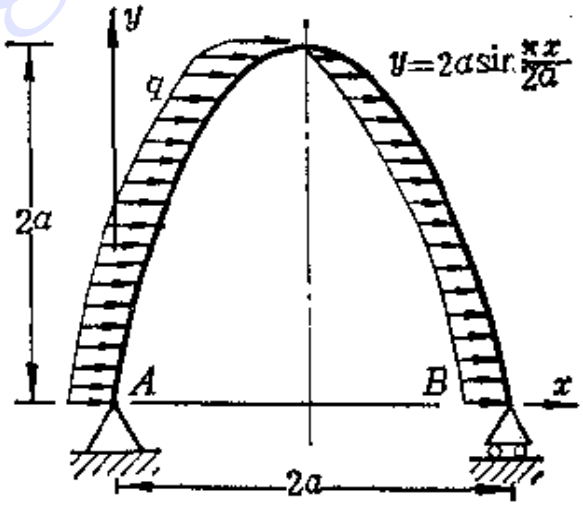


题 6.29 图

6.30 图示直、曲两悬臂梁，在自由端上都作用有垂直于轴线的集中力P，问两者在1-1截面上的内力素有何差别？若力P变为垂直于纸面作用时，情况会有什么变化？



题 6.30 图



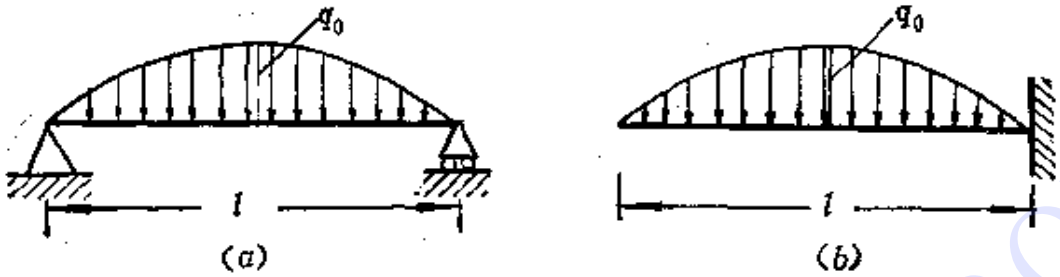
题 6.31 图

*6.31 图示正弦曲线状的曲梁，工作时承受均布的风载荷，如何确定梁内任意截面的内力？

*6.32 图示的简支梁和悬臂梁，其上皆作用有正弦分布载

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

荷，即$q(x)=q_0\ \sin\frac{\pi x}{l}$。如何简便得出弯矩在梁中的分布式？



题 6.32 图

第二节 应 力

6.33 什么叫平面弯曲？试就日常生活和工程实际中所见，列举一些平面弯曲的例子，并指出它们是属于哪种约束类型的梁。

6.34 在推导拉伸（压缩）、扭转和弯曲的应力公式时，平面假设的具体内容是否相同？有什么共性和特性？它在公式推导中有什么用处？

6.35 为什么梁的正应力公式$\sigma=My/I_z$和曲率公式$1/\rho=\pm M/EI_z$只是在平面弯曲时才适用？

6.36 欲使梁实现平面弯曲，对外力的作用有何要求？

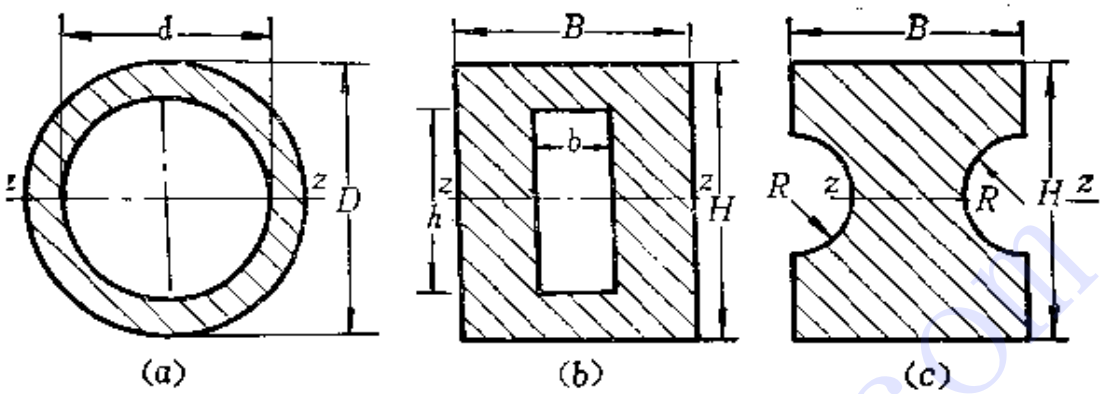
6.37 轴向拉、压时正应力与截面积有关，为什么平面弯曲时正应力则要与截面对中性轴的惯矩有关？

6.38 对于图a所示的梁截面，它对中性轴惯矩和抗弯截面系数可否按下式计算？

$$I_z=\frac{\pi D^4}{64}-\frac{\pi d^4}{64},\quad W_z=\frac{\pi D^3}{32}-\frac{\pi d^3}{32}$$

如何正确地写出图b和c所示截面的I_z和W_z？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 6.38 图

6.39 试指出下列每项中两个名词在概念上各有何差异：

（1）纯弯曲与平面弯曲；

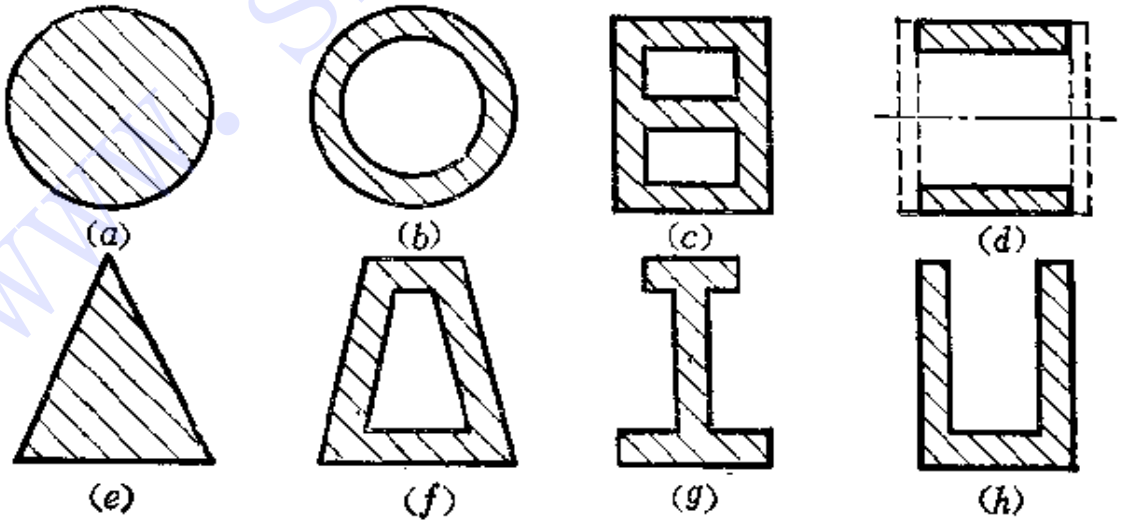
（2）中性轴与形心轴；

（3）惯矩与极惯矩；

（4）抗弯刚度与抗弯截面系数；

（5）梁的危险面与危险点。

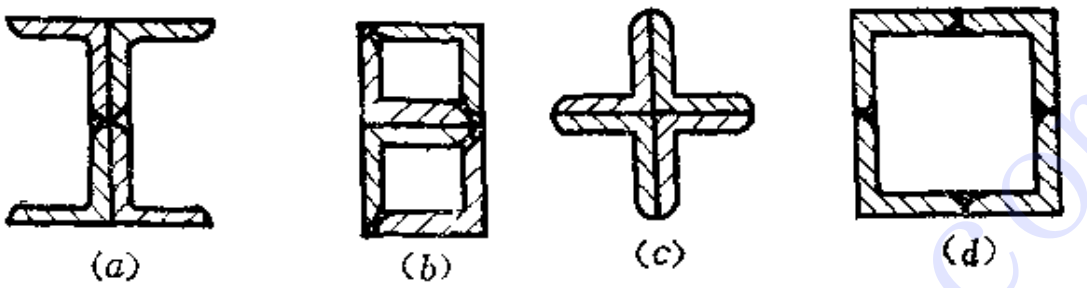
6.40 图示梁的各种截面形状，若梁在铅垂的力系作用下产生平面弯曲，并假定弯矩为正，问这些截面上的正应力沿高度如何分布？试画出分布示意图。



题 6.40 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

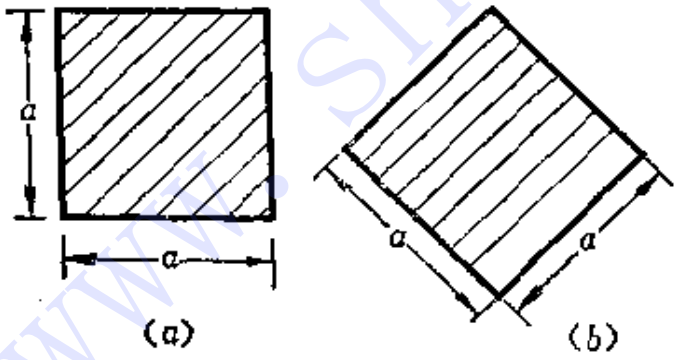
6.41 梁用四根角钢组合而成，问在纯弯曲时图示各种组合形式中哪一种强度最佳？哪一种最劣？并说明其理由（外力平面为铅垂对称面）。



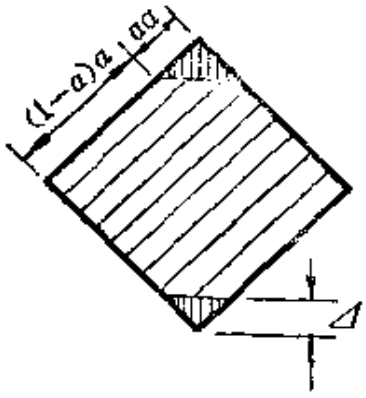
题 6.41 图

6.42 在房屋建筑中，我们常常看到空心楼板和用波瓦做的屋面。试用弯曲理论来说明其好处何在。

6.43 正方形截面梁，按图示两种方式放置，当承受铅垂对称平面内的横向力作用时，问在最大正应力相同的条件下两者所能承受的弹性弯矩之比是多少？若梁由理想塑性材料制成，其塑性极限弯矩之比又是多少？



题 6.43 图

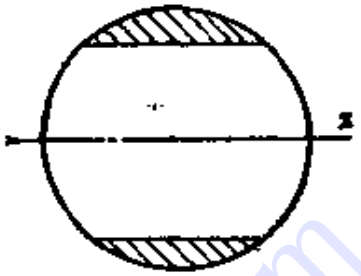


题 6.44 图

6.44 一正方形截面梁，其水平对角线为中性轴，若削去顶和底的棱角，如图所示，问是否可以提高梁的强度？当 α 或 Δ 为何值时，其抗弯截面系数最大？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.45 一根圆木绕 z 轴弯曲时，适当地削去一层（如图所示），在同样弯矩下反而降低了最大正应力。试说明其中的道理。

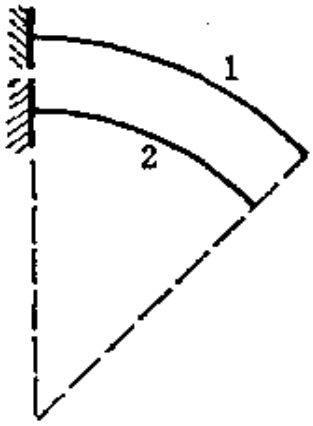


题 6.45 图

6.46 有一直径为 d 的钢丝，绕在直径为 D 的圆筒上，钢丝仍然处于弹性范围。为了减小弯曲应力，有人认为要加大钢丝的直径，你说对吗？试说明其理由。

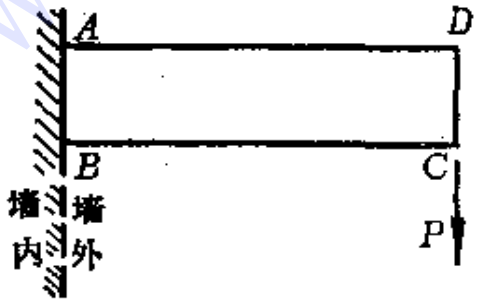
6.47 缠绕在船舶缆桩上的缆绳是用多股细钢丝扭成的。这种使用时被卷弯甚至要打结的缆绳，其钢丝要直径大些、根数少些，还是要直径小些、根数多些好？为什么？

6.48 材料和横截面均相同的两根梁，变形后挠曲线为两同心圆弧，如图所示。问这两根梁的最大正应力是否相同？



题 6.48 图

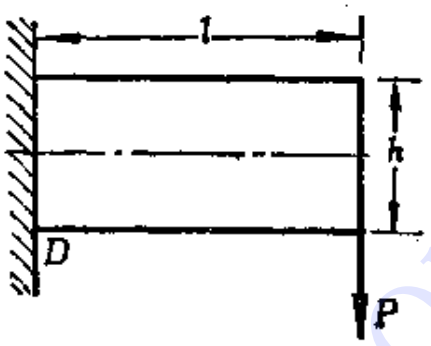
6.49 伽利略在1638年出版的《关于两门新科学的对话》一书中，就图示的悬臂梁写道：“如果杆件断裂，裂口一定发生在 B 处，该处榫眼边缘充当杠杆 BC 的支点，而力就是作用在这里的；杆的厚度 BA 为杠杆的另一臂，沿 BA 存在着抗力。此抗力抵抗着墙外的 BD 部分与墙内部分相分离。从以上所述，可知作用于 C 处的力的大小对棱柱杆厚度处的抗力的大小之比（棱柱杆的厚度系指 BA 端和其接连部分的嵌接高度），等于 BA 长度之半对 BC 长度之比值。”从现在的观点看，这相当于假定正应力在横截面上是怎样分布的？



题 6.49 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.50 在法国科学院会员 E·马略特去世不久（1686年）刊出的一篇论文中，分析了悬臂梁的强度问题。他先假定纵向纤维所受的力与到 D 点（见图）的距离成正比。于是得出矩形截面悬臂梁的载荷 P 与固定端截面上分布拉力的合力 $S/2$ 的关系（S 相当于 $\sigma_{max}bh$，b 为梁宽）：



题 6.50 图

$$P=\frac{Sh}{3l} \qquad (a)$$

试分析这里相当于假定正应力在截面上是如何分布的？

接着，他观察到梁的上半部受拉、下半部受压，并假定受拉与受压的分布相同，他将 $h/2$ 代替式（a）中的 h，于是得出：

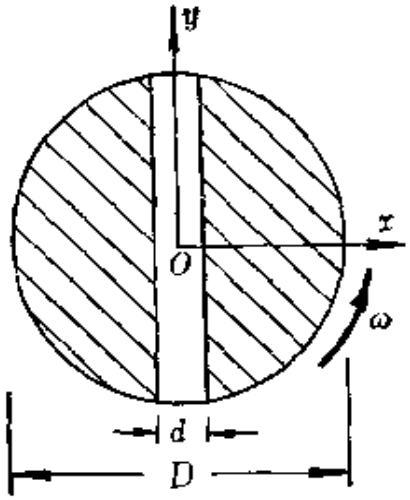
$$P=2\left(\frac{S\frac{h}{2}}{3l}\right)=\frac{Sh}{3l} \qquad (b)$$

试分析这里相当于假定正应力在截面上是如何分布的。由于式（a）和（b）相同，他就错误地认为中性轴的位置无关紧要。试指出他在推导式（b）中的错误。由这个历史故事，给我们以什么启示？

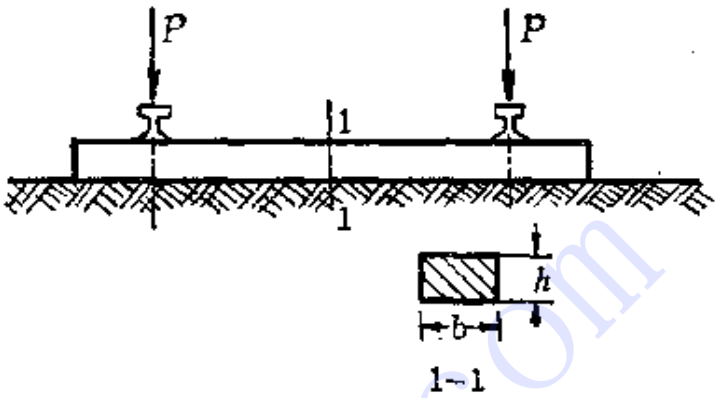
6.51 法国著名力学家纳维（C.-L.-M.-H.Navier）1819年在桥梁道路学院讲授材料力学时，曾假定棱柱杆弹性弯曲时，其中性轴把截面划分成这样两部分，即拉应力对此轴的力矩必与压应力对此轴的力矩相等。这样来确定中性轴的位置对吗？为什么？

6.52 一根圆轴直径为 D，开有一个直径为 d 的中心横孔（见图）。在所取的 yOz 坐标平面内承受纯弯曲，弯矩为 M。若圆轴以匀速 ω 绕轴线 z 转动，试分析此轴转动到什么位置时截面上正应力最大，并指出此最大正应力作用在截面的什么位置上（轴线 z 垂直于纸面）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 6.52 图



题 6.53 图

6.53 在静载下，矩形截面梁竖放要比横放的抗弯能力大。但有些矩形梁却是横放的，比如钢轨下面的枕木，这是什么道理？

6.54 一 T 字形截面的灰铸铁梁，在下列诸条件下 T 字形是正置还是倒置好？并指出危险点的可能位置。

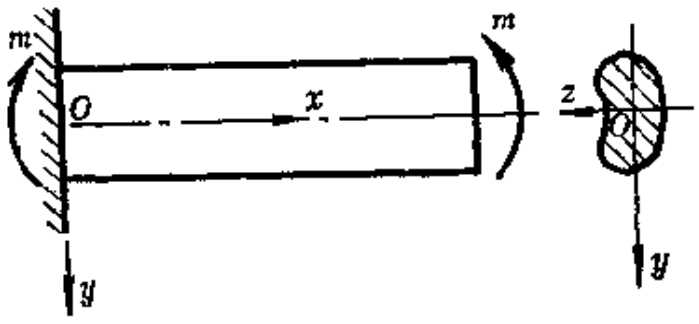
（1）全梁的弯矩 $M>0$；

（2）全梁的弯矩 $M<0$；

（3）全梁有 $M_1>0$ 和 $M_2<0$，且 $|M_2|>M_1$。

6.55 灰铸铁的牌号有两个数字，例如 HT15-33，其中第一个数字表示拉伸强度限，第二个数字表示弯曲强度限（单位均为 kgf/mm^2）。为什么两者不同呢？

*6.56 已知一任意截面的等直梁，在集中力偶作用下产生纯弯曲。图中的 y 和 z 轴是正交的形心轴（但不是主轴），力偶作用在 xOy 平面内。若不使用已有的平面弯曲应力公式，试



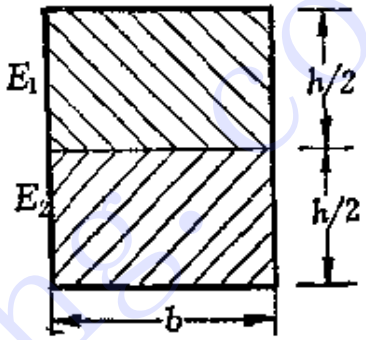
题 6.56 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

直接从平面假设出发推导此梁横截面上的正应力公式。

*6.57 一矩形截面梁，其材料在拉伸和压缩时的应力应变关系为幂函数关系，即$\sigma = c|\varepsilon|^n$，其中$c$和$n$为材料常数。试问如何推导平面弯曲时横截面上正应力与弯矩的关系式？写出最大正应力表达式，并与服从胡克定律材料的结果作一对比。

*6.58 两材料不同而尺寸相同的金属板紧密地粘合在一起（截面如图）成为一双金属梁。在纯弯曲（弯曲力偶在铅垂平面内）时梁内的正应力分布与同样尺寸的单金属梁有无差异？试指出双金属梁正应力沿截面高度的分布规律。这时中性轴的位置是否仍然通过截面图形的形心？



题 6.58 图

6.59 有没有拉伸与压缩时的弹性模量不相同的材料？试举出一些例子。用这样的材料制成矩形截面梁，它在纯弯曲条件下横截面上的正应力该如何分布？

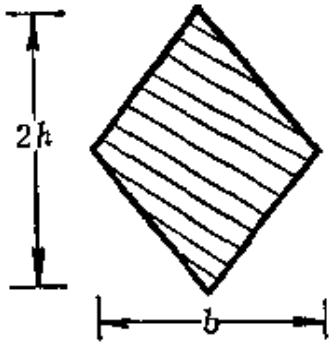
6.60 有一矩形截面的悬臂梁，全长上在纵向对称面内承受平行梁高h方向的均布载荷作用。若已知梁长l、截面尺寸$b \times h$和分布载集度q，试回答下列的问题：

（1）在梁的任意截面处，按正应力的分布规律考查，纵向力对中性轴之矩等于该截面的弯矩吗？

（2）按剪应力的分布规律，它构成的切向力等于该截面的剪力吗？

（3）若从梁的中性层纵向剖开，此时该面上构成的合力与什么力平衡？

6.61 图示为梁的菱形截面，假定在对称轴上的铅垂剪力下剪应力的铅垂分量沿宽度均匀分布，问如何确定此分量沿截面高度的分布？

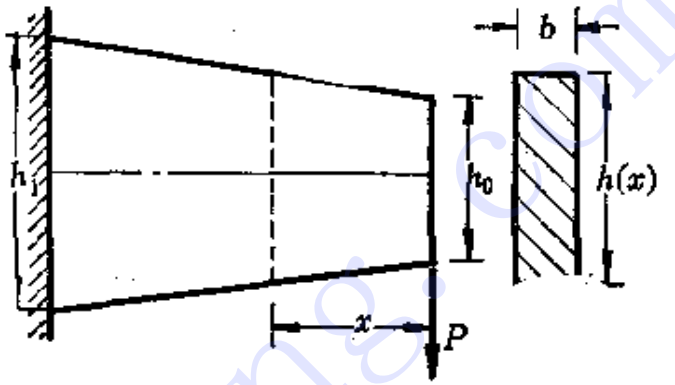


题 6.61 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*6.62 试定性地画出题6.40图所示各种梁截面(图 d 除外)沿梁高度铅垂剪应力或剪应力铅垂分量的分布图（假定剪力在对称轴上铅垂向下）。试总结一下，等直梁的最大剪应力是否总是发生在中性轴上？哪些截面形状不在中性轴上？

*6.63 梁的剪应力公式 $\tau = QS/Ib$ 在使用上有什么限制条件？可否推广应用于图示变高度的矩形截面梁？为什么？

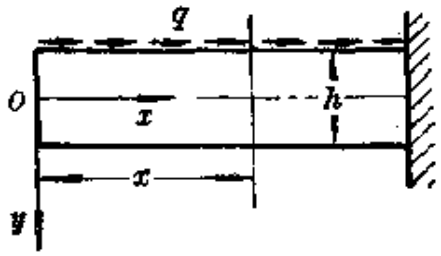


题 6.63 图

6.64 矩形或圆形简支木梁，在较大的横向均布载荷作用下，为什么会在两支座处出现纵向裂纹？这些裂纹最大可能发生在横截面的什么位置上？为什么？

6.65 连接件（如键等）受剪切作用时，为什么不用梁的公式 $\tau = QS/Ib$ 来计算截面上的剪应力呢？

*6.66 一悬臂梁顶部作用有均布的切向力，如图所示。人们分析任一横截面的内力时，知道轴力 $N = -qx$，弯矩 $M = qxh/2$ 和剪力 $Q = 0$。由此是否可以认为任意横截面上只有正应力而没有剪应力？为什么？

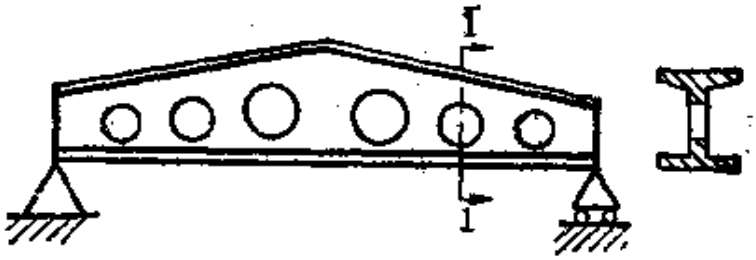


题 6.66 图

6.67 在建筑工地上有时会看到将要安装的屋架梁制造成图示的形状，即靠中间的部分在腹板上有许多圆孔，且工字形截面的中间高、两边低。这样做从材料力学的角度看是否合理？为什么？

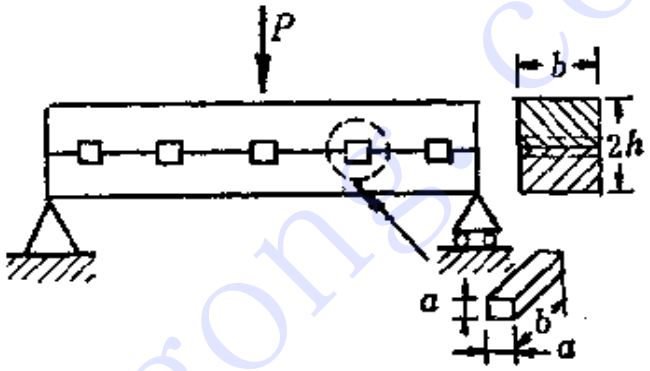
6.68 欲将两块截面都是 $b \times h$ 的板条合成为一根 $b \times 2h$ 的梁，可否在接触面上挖槽并将键嵌入（如图所示），使之成为一

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



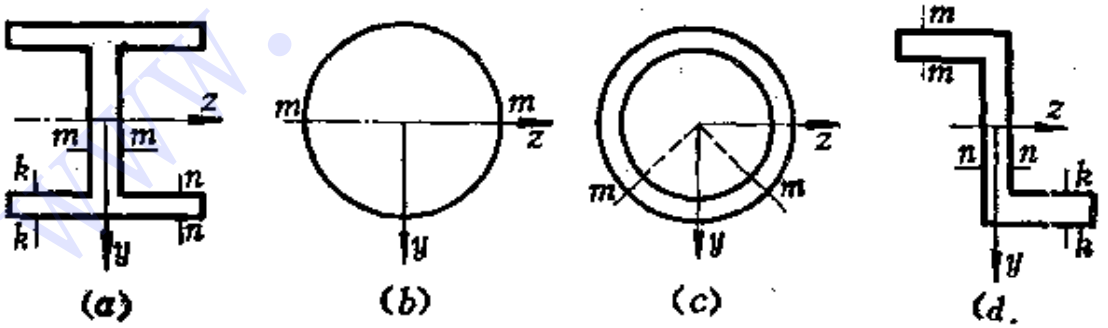
题 6.67 图

个整体？如果可以，在键的尺寸 $a\times a\times b$ 选定后，键的数目该如何确定？如果不加这些键，两块木板自己叠放在一起承受弯曲时，σ 和 τ 沿截面高度将如何分布？



题 6.68 图

6.69 图示梁的各种截面形状，在横力弯曲下（假定 y 轴上剪力方向铅垂向下），试画出标定位置 m-m，n-n 等处剪应力的分布和方向。参照矩形截面的剪应力公式 $\tau=QS/Ib$，试指出在计算剪应力时，各 S 应按哪部分面积对哪根轴取静矩。



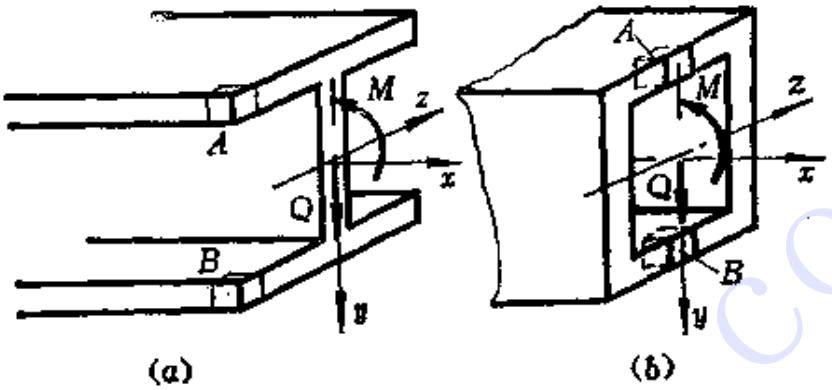
题 6.69 图

6.70 闭口薄壁杆扭转时的剪力流与开口薄壁杆横力弯曲时

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

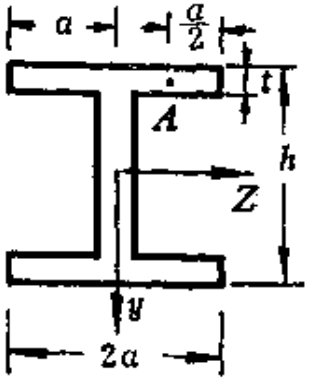
的剪力流，有什么共同之处和不同之处？

6.71 已知梁的某横截面上剪力 Q 和弯矩 M 如图所示，试指出 A、B 两单元体各面上的应力。



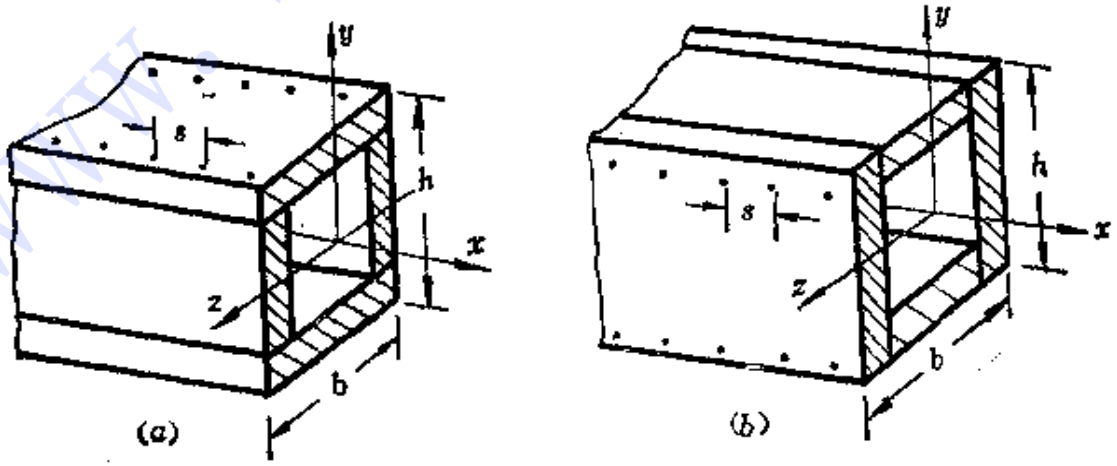
题 6.71 图

6.72 用茹拉夫斯基公式 $\tau = QS/I_z b$ 计算工字梁翼缘上 A 点（见图）水平剪应力时，S 和 b 值各表示什么意思？



题 6.72 图

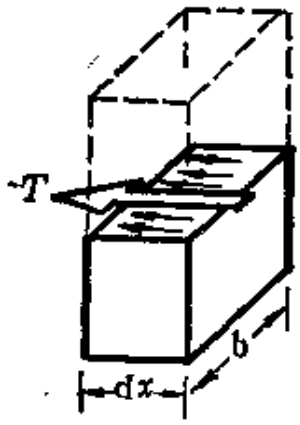
6.73 一箱形梁由四块木板钉合在一起，现有两种拼装方案，如图所示，但最后的外形尺寸 $b \times h$ 一样，用的钉子和钉的间距也一样。试问在 xy 平面内承受垂直于 x 轴的载荷时，两种方案的实际效果是否一样？有什么差异？



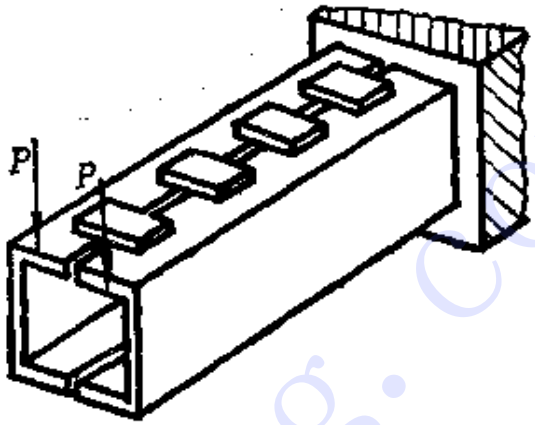
题 6.73 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.74 推导矩形梁的剪应力公式时，可以认为纵截面上的剪应力是平均分布的，即 $\tau = T/bdx$（见图），为什么不能认为横截面上的剪应力也是平均分布的？



题 6.74 图



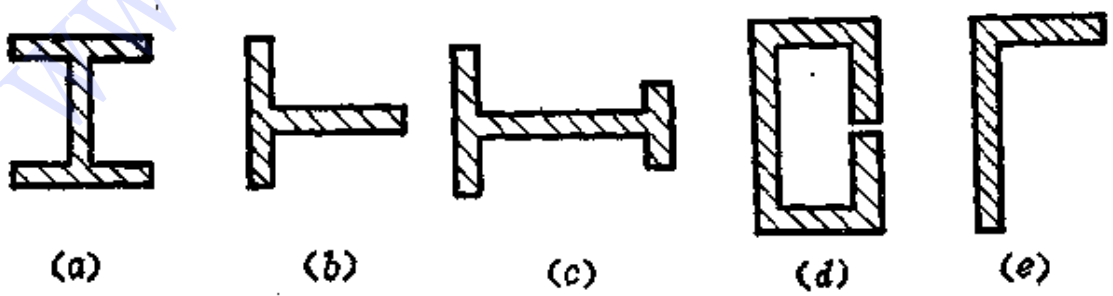
题 6.75 图

6.75 两根槽钢在上、下翼缘处焊接金属板条而组成一个整体，使用时为自由端受横向力的悬臂梁，如图所示。问上、下板条传递什么样的力？

6.76 何谓弯曲中心（弯心）？弯心的位置随外力的大小和作用方向而改变吗？

6.77 如何确定弯心的位置？为什么说弯心一定在横截面的对称轴上？没有对称轴的横截面，弯心的位置能否直接判断？

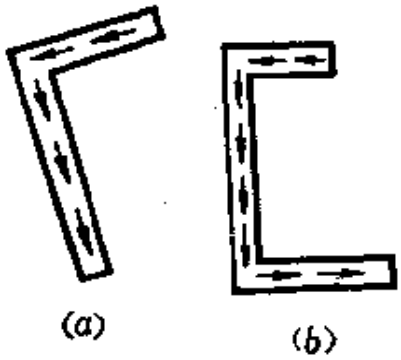
6.78 试判断图示各种截面的形心和弯心的大概位置。若剪力铅垂向下且通过弯心，试画出剪力流的流向。



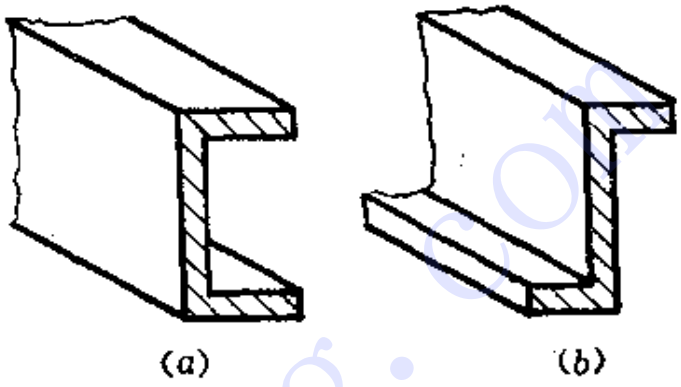
题 6.78 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*6.79 在分析开口薄壁截面弯心的位置时，对如图 a 所示的角形截面，可由剪力合力的作用点立即定出。那么，对于图 b 所示的不对称槽形截面，是否也可用同样的方法确定弯心的位置呢？



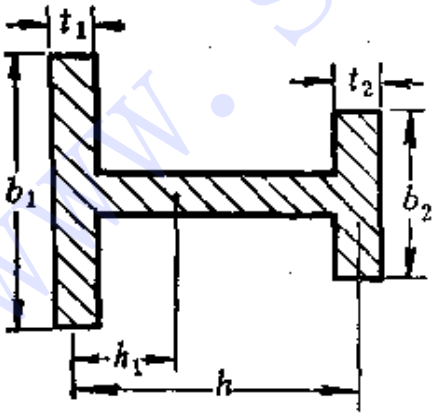
题 6.79 图



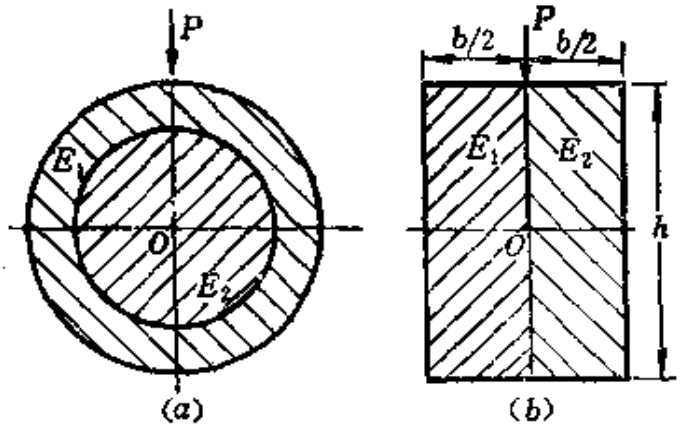
题 6.80 图

6.80 试绘出图示槽形和 Z 形截面梁的形心主惯面（形心主轴与梁轴线组成的平面）和弯心主惯面（弯心主轴与弯心连线组成的平面）。若要保证平面弯曲，同时又不产生扭转，外力平面应与上述哪个平面重合？

6.81 对于图示梁的非对称截面，怎样确定弯心的位置（可用 h_1 表示）？



题 6.81 图



题 6.82 图

6.82 由两种材料粘合而成的圆形和矩形截面等直梁，若载

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

荷作用在几何形状的纵向对称平面内（见图），是否仍发生平面弯曲？如何确定它们的弯心位置？

6.83 试归纳一下平面弯曲的基本特征是什么？对于任意截面形状的梁，产生平面弯曲的条件是什么？

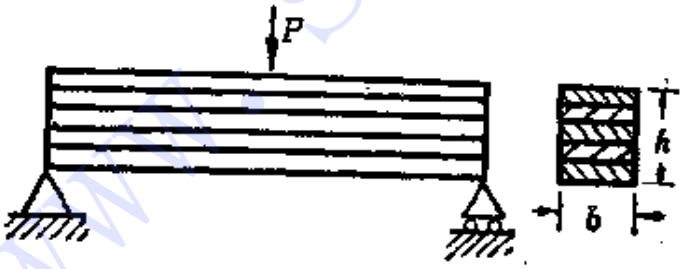
6.84 在通常情况下，梁的长度比高度大很多。试以实心截面梁为例，用量纲分析法说明此时在横力弯曲条件下最大正应力会远远大于最大剪应力。

6.85 对于承受横力弯曲的梁，在哪些情况下，（1）要进行剪应力强度校核？（2）要用强度理论进行校核？

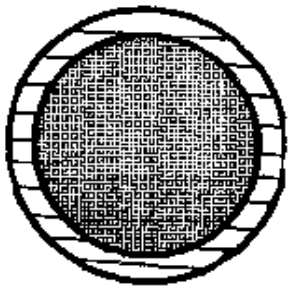
6.86 在梁的强度校核时，如何确定危险面？是否最大弯矩所在的截面必定是最危险的截面？为什么？

6.87 工字形截面梁在强度校核中应注意什么问题？有一等截面工字梁的 M_{max} 与 Q_{max} 不在同一截面，另一截面上 $M_1<M_{max}$，$Q_1<Q_{max}$，但 Q_1 和 M_1 与 Q_{max} 和 M_{max} 的数值都比较接近。若 $\sigma_{max}<[\sigma]$，$\tau_{max}<[\tau]$，是否就可断定该梁的强度得到了保证呢？为什么？

6.88 图示多块木板构成的叠层梁（木板之间并无胶粘结），对于这种组合形式的梁，任意横截面上的正应力和剪应力是怎样分布的？该如何进行强度校核？



题 6.88 图



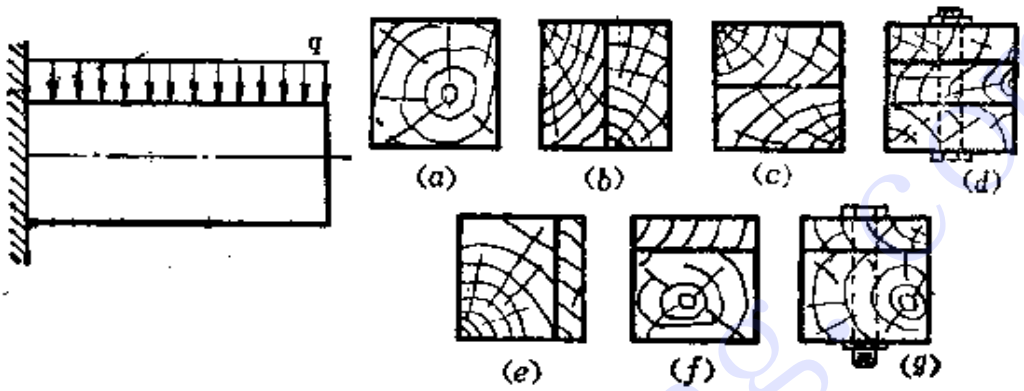
题 6.89 图

6.89 如图所示直梁的截面，内、外两种材料的弹性模量分别为 E_2 和 E_1，弯曲时二者无相对滑动。对这种梁该如何校核强度？在选用材料时，把刚度和强度好一些的材料放在里边还是放

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

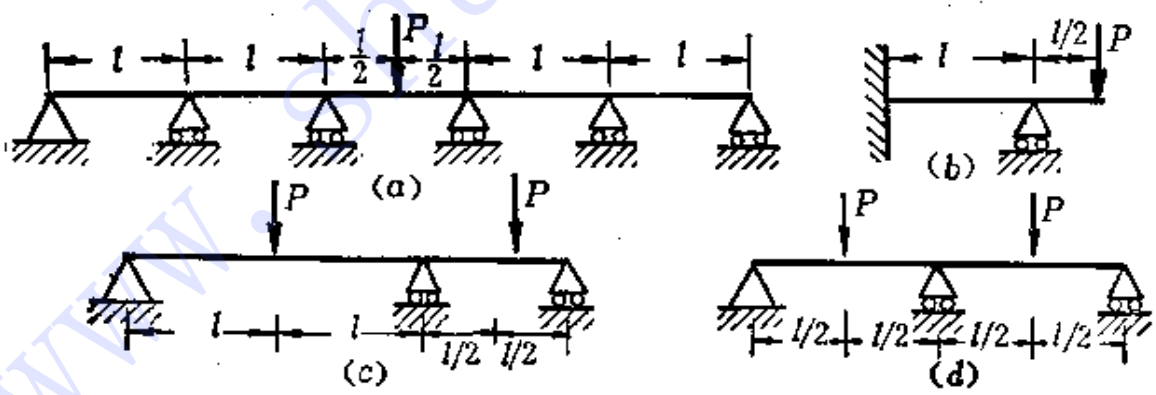
在外层为好？

6.90 一根方截面木梁，原设计为一根木料做成，但因尺寸太大，后改用板料拼合而成，其方案有多种，如图所示。试分析一下它们的承载能力是否相同。



题 6.90 图

6.91 按极限载荷法计算时，一般情况下出现多少个塑性铰时就认为梁开始失效？试判断图示诸梁在失效时出现塑性铰的数目和位置。

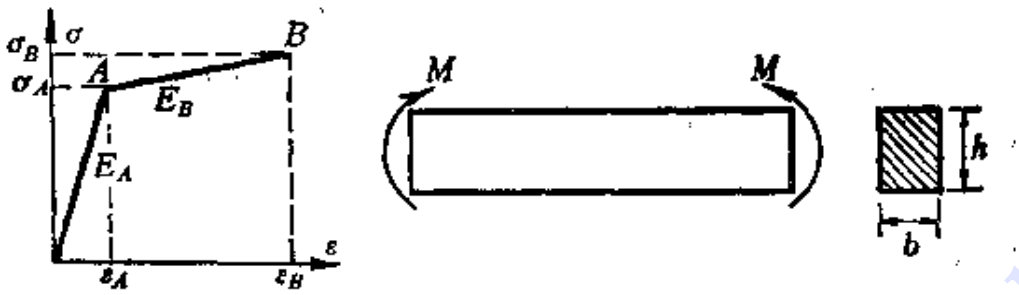


题 6.91 图

*6.92 某种材料拉伸时的 σ-ε 图由两段直线近似表示（见图），且拉伸与压缩的 σ-ε 图相同。若用此材料做成图示承受纯弯曲的矩形梁，当 $\sigma_{max}=\sigma_B$ 时发生断裂。试写出此时极限弯

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

矩的定积分表达式。提示：平面假设仍然适用。



题 6.92 图

6.93 平面曲杆纯弯曲时的正应力计算及其分布与直杆比较有何不同？试比较下列等截面杆在纯弯曲时中性轴的位置：

（1）直杆的弹性弯曲；

（2）曲杆的弹性弯曲；

（3）上、下由两种弹性模量不同的材料组合成的直杆的弹性弯曲；

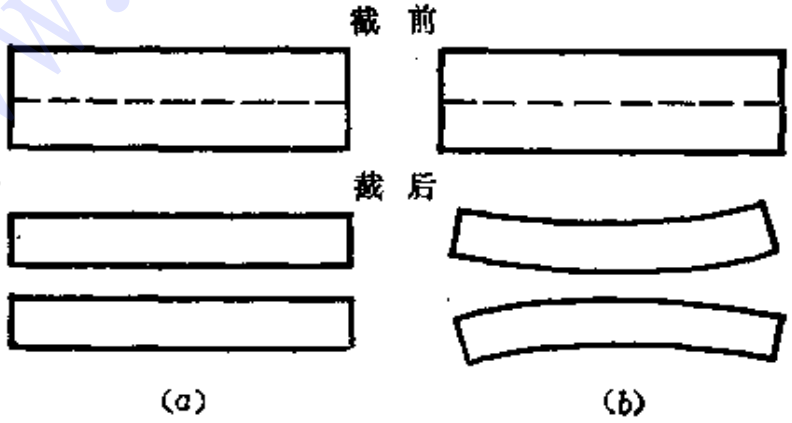
（4）材料拉、压时弹性模量不等的直杆的弹性弯曲；

（5）理想塑性材料直杆的塑性弯曲；

（6）理想塑性材料曲杆的塑性弯曲。

6.94 等截面直杆和曲杆，在推导线弹性范围内纯弯曲的正应力公式时，都采用了平面假设，为什么两者所得的正应力分布规律有很大的差别？

6.95 有两块平板，沿某处纵向截开，如图所示，结果一块

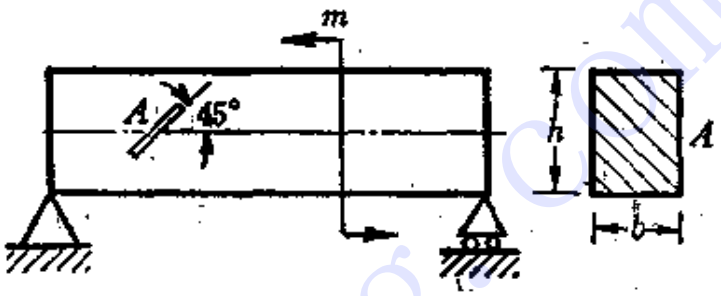


题 6.95 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

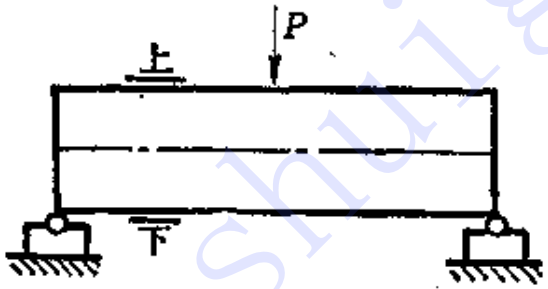
是自由分离而不变形（图a），另一块截开后两小块都有微弯(图b)。试问这两块板在未加载的情况下为什么会出现两种不同的结果？

6.96 某矩形截面简支梁，其上作用的外力偶 m 值有待测定。于是在梁的侧表面 A 点处，沿与中性层交角为45°的方向贴上电阻应变片，如图所示。当将 m 移去后测得 e_A，问如何分析 e_A 与 m 的关系？此关系受 m 的作用位置的影响吗？与 m 的作用方向有关吗？



题 6.96 图

6.97 用电阻应变仪测量图示梁（截面对中性轴对称）的正应力时，常常测得同一截面的上、下表面处的正应力大小不一样（梁在支座处表面较粗糙时尤为明显）。试问是上表面的大些还是下表面的大些？为什么？



题 6.97 图

6.98 在宇航等工程中宜尽量采用质轻而强度和刚度较高的

材料 \ 性能	σ_s或$\sigma_{0.2}$ (MPa)	σ_b (MPa)	E (GPa)	ρ (kN/m³)	σ_b/ρ (10^4m)	E/ρ (10^7m)
低碳钢	250	390	210	78	0.5	0.27
中强钢	370	620	210	78	0.8	0.27
硬　铝	340	540	75	27	2	0.28

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

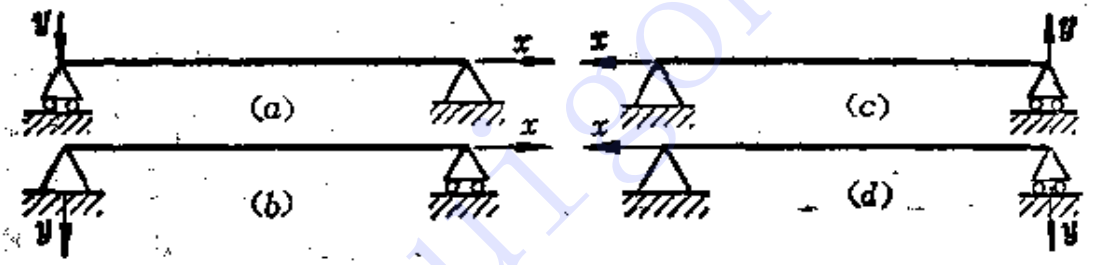
材料，这就涉及材料的几个参数：E、σ_b、σ_s和ρ（重度）。现要设计一根受弯构件，可供选择的材料有三种，其性能见表。

问用哪种材料比较轻？用哪种材料变形比较小？应该用什么指标来衡量材料的强度好或刚度好？

第三节　变　　形

6.99　用挠曲线的近似微分方程求解梁的挠度方程时，它的近似性表现在哪里？在哪些情况下用它来求解是不正确的？

6.100　在弹性梁的小挠度弯曲中，微分方程$EIy''(x)=\pm M(x)$右边正负号按什么规则选定，比如在图示各坐标系中该如何决定？



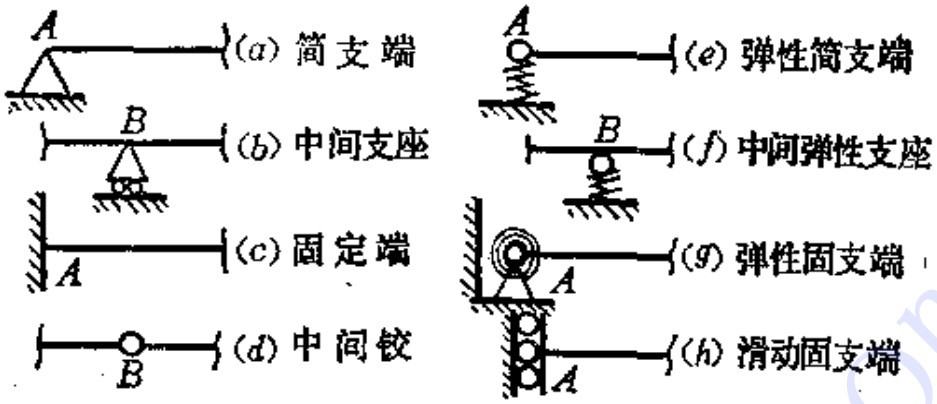
题 6.100 图

6.101　试将挠曲线微分方程写成直接用载荷集度$q(x)$而不是用弯矩$M(x)$表示的形式，并说明在参考坐标系里正负号的正确选择。

6.102　用积分法求梁的变形时，其积分常数如何确定？有无物理意义？

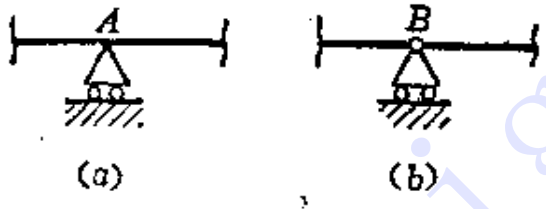
*6.103　在工程上所设计的梁中，可见到多种约束形式。试以图示八种情形为例，写出各约束处的几何边界条件（转角和挠度）和力的边界条件（剪力和弯矩）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

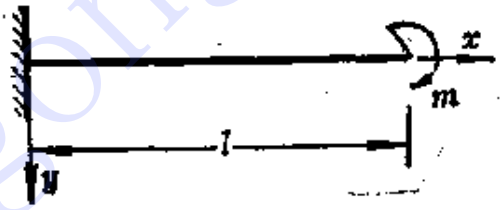


题 6.103 图

6.104 试对比图中的两种约束，阐述它们提供的边界条件有何异同。



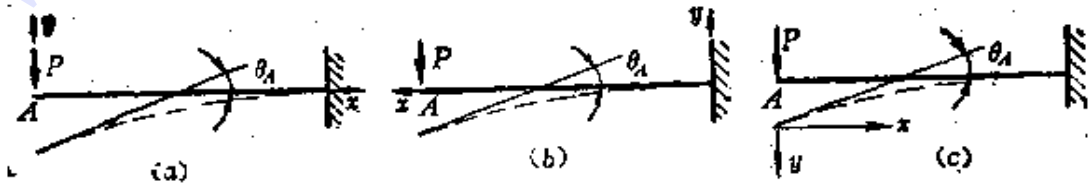
题 6.104 图



题 6.105 图

6.105 由$1/\rho=\pm M/EI$可知，当M为常量即纯弯曲时，全梁的曲率不变，ρ为常数，所以挠曲线是一条圆弧线。今取图示悬臂梁，自由端作用有集中力偶m，亦为纯弯曲，但解得$y=mx^2/2EI$，即挠曲线是一条抛物线。为什么会这样？试说明其理由。

6.106 一悬臂梁如图所示，试指出图a和b两种情况下转



题 6.106 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

角 θ_A 的符号。如果将坐标轴选成图 c 所示那样，边界条件和 θ_A 的正负号有什么变化？

6.107 既然 $EIy''(x)=M(x)$，那么 $M=0$ 处一定是 $y''=0$ 吗？反之，$y''=0$ 处，一定是 $M=0$ 吗？

*6.108 适用于线弹性小挠度梁的曲率与挠度关系式 $\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}$，是否仍适用于非弹性或非线性弹性的小挠度梁？

6.109 试从弯曲理论解释为什么传动轴上的齿轮或带轮总避免放在跨中，而尽量靠近轴承处。

6.110 在设计中，一受弯的碳素钢轴刚度不够，有人建议改用优质合金钢。此项建议是否合理？为什么？

6.111 工程上各种受弯构件，在设计中是否要求它们的刚度愈高愈好？试举些实例说明。

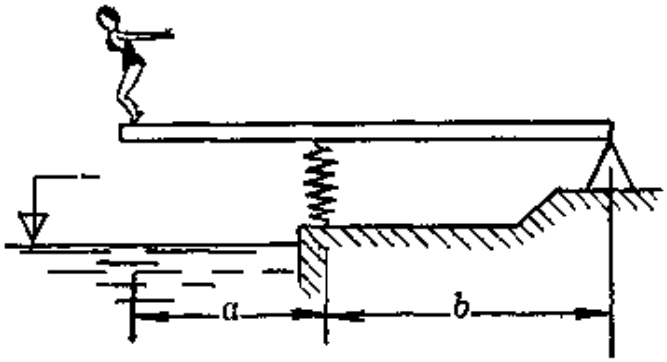
6.112 为了使梁有较大的变形，可以设计成截面为矩形的等高度等强度梁（比如汽车后桥的叠板弹簧）。试问这种梁的挠曲线形状有什么特点？

6.113 对图 a 所示简支梁，（1）按所选定截面，发现跨中处强度不够。于是设计者采用图 b 所示的局部补强的办法，使跨中截面满足强度要求。这个方案是否可行？（2）若发现跨中挠度超过了设计的允许值，也采用这种局部增加刚度的办法是否合理？为什么？

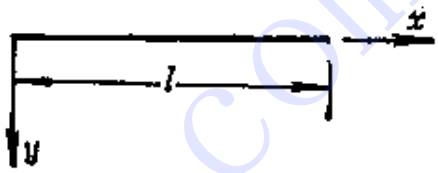
题 6.113 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.114　游泳池的跳板如图所示。如果改变跳板的刚度，支承弹簧的变形大小是否也随着改变？如果将跳板右端的铰支座改变成固定端，弹簧的变形在下列两种情形下该如何确定：（1）跳板为一刚性板；（2）跳板为一弹性板。



题 6.114 图



题 6.115 图

6.115　若已求出图示等刚度梁的挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{qx^5}{120l}$$

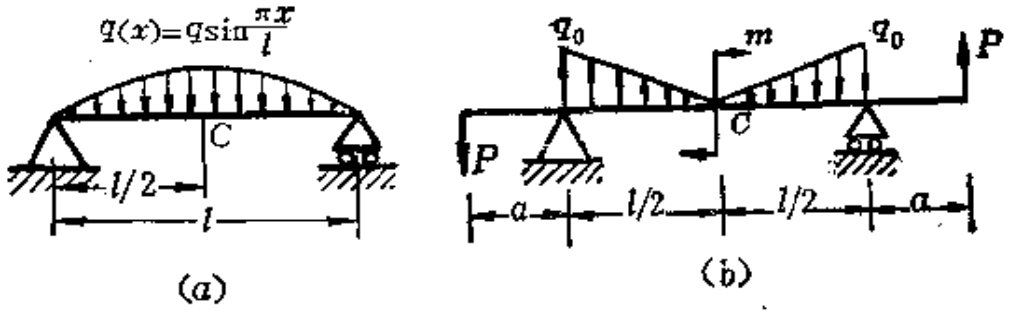
试问：（1）$x=0$ 和 $x=l$ 两端点处的约束是什么样的？（2）最大弯矩和最大剪力各是多大？（3）梁上的载荷是怎样分布的？

6.116　对图示带有中间铰的等刚度梁，外力偶 m 作用在中间铰的左边（图 a）或右边（图 b）时，梁的变形是否相同？为什么？

题 6.116 图

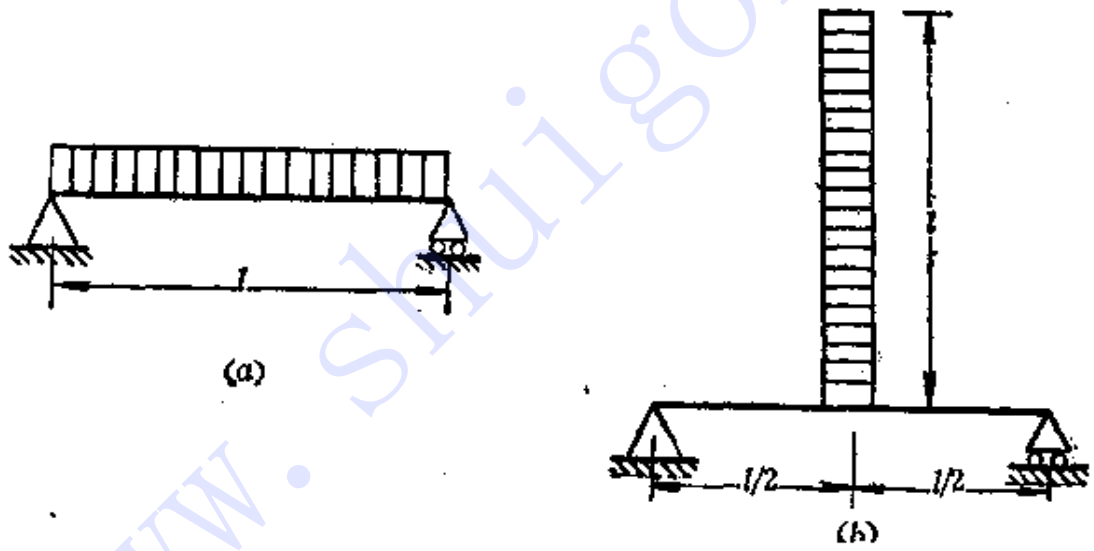
6.117　对图示两梁均不计自重，试判断在跨中 C 点处挠度和转角是否等于零，并说明其理由。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 6.117 图

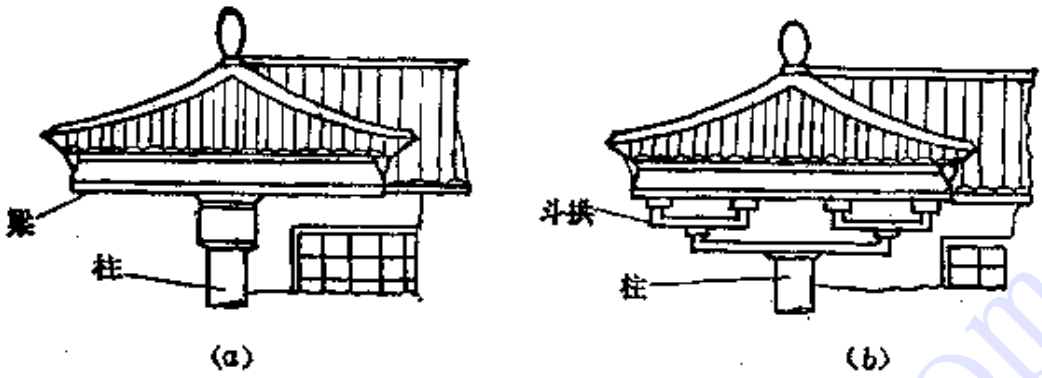
6.118 在建筑工地上，常常将准备砌墙的砖堆放在跳板上。跳板两端支撑在脚手架上，可视为简支梁。砖或沿板上散放（图 a），或集中堆在中间（图 b）。这两种堆砖情况下跳板的最大正应力和最大挠度各有多大差别？



题 6.118 图

6.119 中国古代木结构建筑中，在上梁与柱子（图 a）的连接处，往往采用一种独具风格的斗拱结构（示意如图 b）。联系题6.118的结果，试从材料力学的观点分析一下这种在世界上特有的结构方式有什么优点。

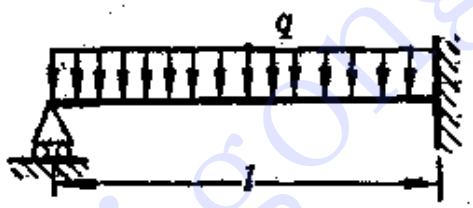
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



(a)　　(b)

题 6.119 图

6.120 对图示等刚度超静定梁，你看能通过对挠曲线微分方程的二次积分求出梁的变形吗？



题 6.120 图

6.121 图示一等刚度外伸梁，解得其外伸端点的挠度等于零，但从直观上看这是不可能的。这个解题过程如下，试分析其毛病出在哪里。

AB 段

$$M(x_1)=-\frac{qx_1^2}{2}$$

$$EIy_1'=-\frac{qx_1^3}{6}+C_1$$

$$EIy_1=-\frac{qx_1^4}{24}+C_1x_1+D_1$$

BC 段

$$M(x_2)=-\frac{qx_2^2}{2}$$

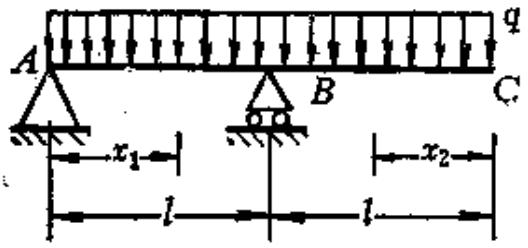
$$EIy_2'=-\frac{qx_2^3}{6}+C_2$$

$$EIy_2=-\frac{qx_2^4}{24}+C_2x_2+D_2$$

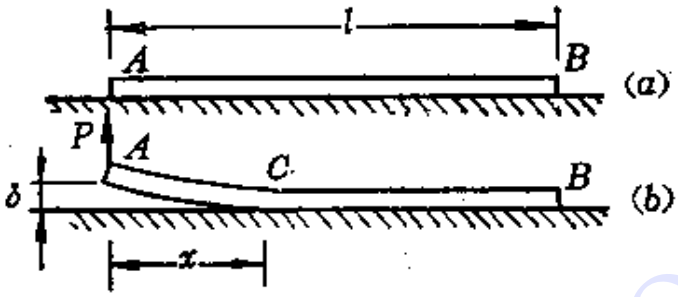
由约束条件，$x_1=0$ 处 $y_1=0$，得 $D_1=0$；$x_1=l$ 处 $y_1=0$，得 $C_1=ql^3/24$。由光滑连续条件，$x_1=x_2=l$ 处，$\theta_1=\theta_2$ 和 $y_1=y_2$，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

得$C_1=C_2$和$D_1=D_2$。于是就得到$x_2=0$处$y_c=0$。



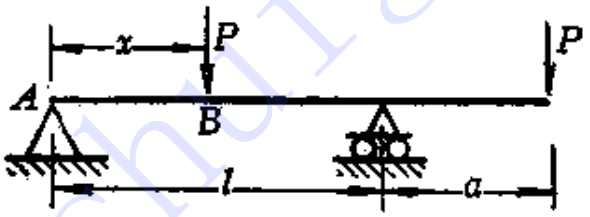
题 6.121 图



题 6.122 图

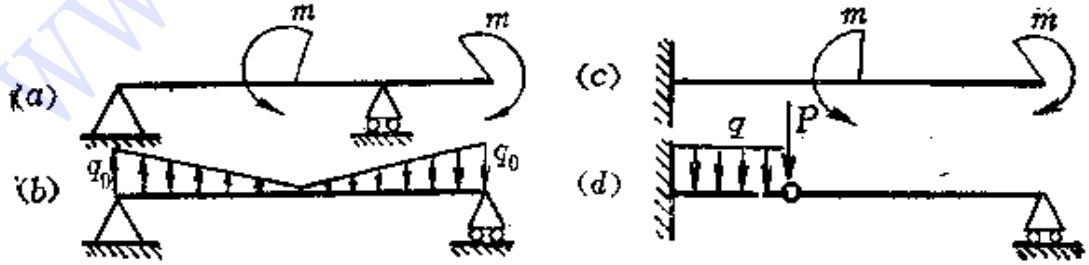
*6.122 一等刚度EI的直杆平放于刚性平面上（图a），其单位长度的自重为q。今在A端施加力P（图b），其值小于$ql/2$。问如何确定A点抬起的高度δ与弯曲长度x的关系？若$P=ql/2$，情况将如何？

6.123 对图示外伸梁，试调整跨P内力的作用点B，使AB段的挠度成线性变化，并说明你是如何定出B点位置的。



题 6.123 图

6.124 不要计算，按你对梁变形的理解试画出图示诸梁的挠曲线草图，并说明是如何画出的。

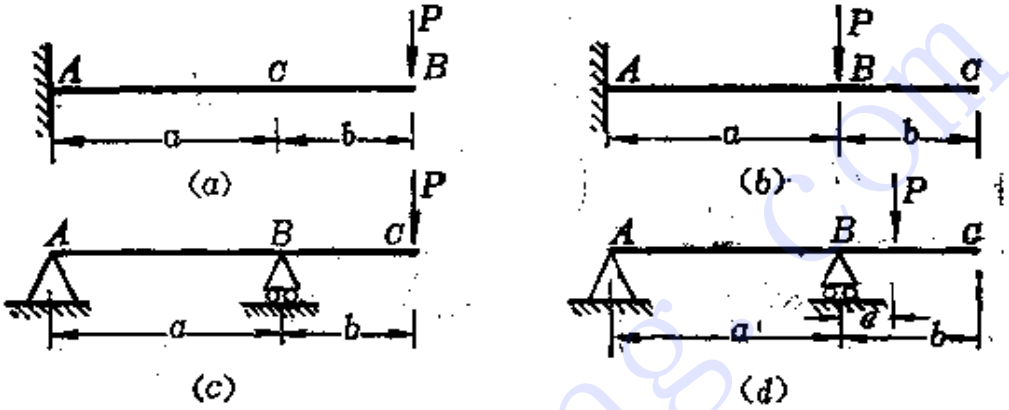


题 6.124 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

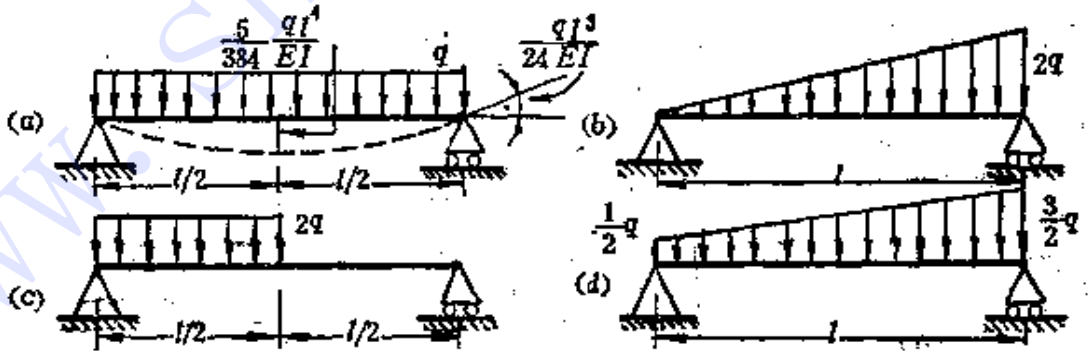
6.125 何谓叠加原理？在什么条件下才可以应用此原理？当用叠加法计算梁的位移时，什么情况下采用载荷叠加？什么情况下采用变形叠加？试举例说明。

6.126 如何利用叠加法计算图示诸梁 C 点的挠度和转角？



题 6.126 图

6.127 若已知简支梁承受均布载荷 q 时的中点挠度和端点转角，如图 a 所示，那么对于图 b、c 和 d 梁的中点挠度以及图 b 梁的中点转角，你能不能通过比较就直接给出它们的结果呢（设图示各梁的刚度相同）？



题 6.127 图

6.128 欲计算图 a 所示的梁在外伸端 C 处的挠度，有人认为宜采用叠加法，并在书中查得图 b 所示外伸梁在 C 处的挠度绝对

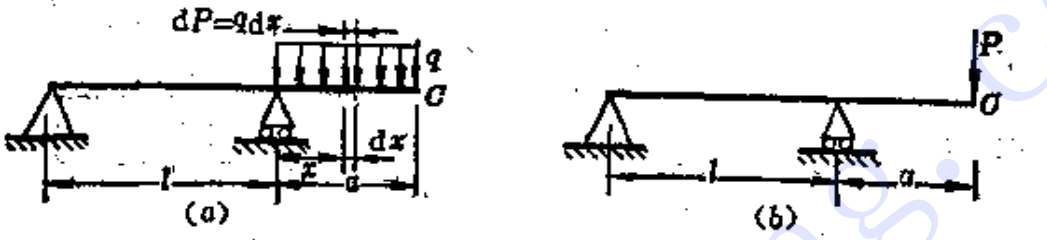
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

值为 $$y_a=\frac{Pa^2}{3EI}(l+a)$$

然后令$a=x$，$dP=qdx$，于是对图 a 的梁写出了如下表达式：

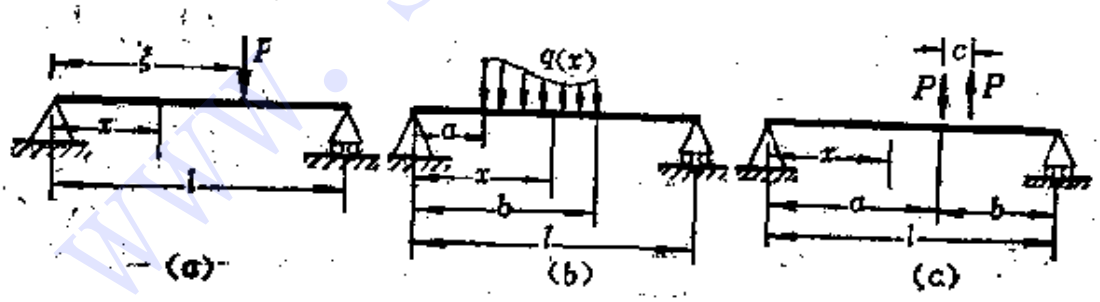
$$y_a=\int_0^a\frac{(qdx)x^2}{3EI}(l+x)=\frac{qla^3}{9EI}+\frac{qa^4}{12EI}$$

此结果对吗？这是不是正确地运用了叠加法？试指出问题所在。



题 6.128 图

*6.129 简支梁上作用有集中力 P（图 a），其作用点位置 ξ 是可变动的，此时任意截面的弯矩 $M=M(P,x,\xi)$和相应的挠度 $y=y(P,x,\xi)$在 $x>\xi$ 和 $x<\xi$ 处都成立。试在这个基础上确定简支梁上：（1）有分布载荷 $q(x)$作用时 x 截面处的弯矩和挠度（图 b）；（2）有集中力偶 $m=Pc$ 作用时 x 截面处的弯矩和挠度（图 c）。然后总结一下正确运用叠加法的要点。

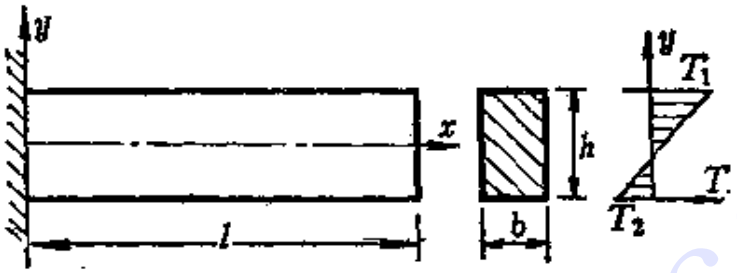


题 6.129 图

*6.130 矩形截面悬臂梁，受到非均匀加热，温度沿截面高度成线性分布，如图所示。若材料的弹性模量为 E，线膨胀系

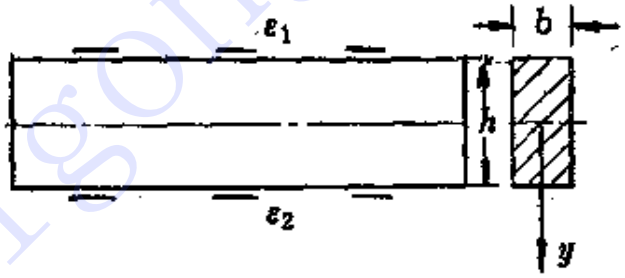
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

数为 α，试问梁因加热变弯的曲率 $1/\rho$ 和最大挠度各有多大？并示意画出挠曲线形状（平面假设仍然适用）。这时梁内有温度应力吗？



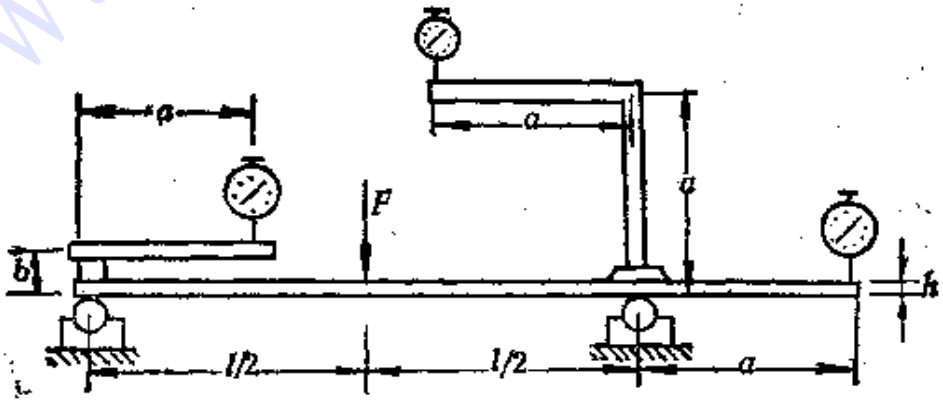
题 6.130 图

6.131 图示一受力板条，可观察到它的轴线既伸长又变弯。若由实验测出该板上、下边缘的纵向应变 ε_1 和 ε_2，问如何由此确定挠曲线的曲率半径？



题 6.131 图

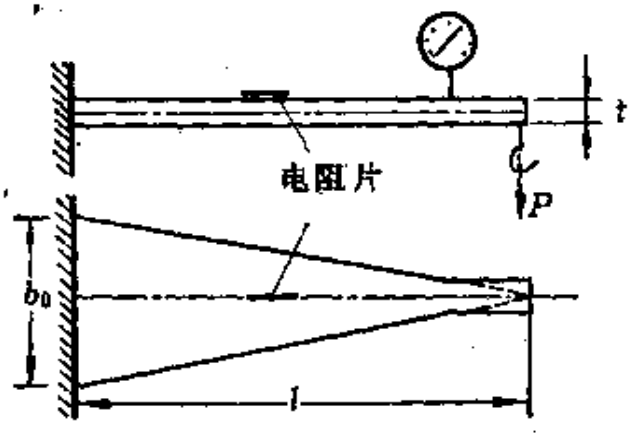
6.132 外伸梁在跨度中点处作用有集中力 P，为测量支座处的转角，设计了三个方案，如图所示。若尺寸 $h<b\ll a$，问三个方案即三个百分表所测得的值是否相同？为什么？此外，试设计用百分表测量梁任一截面转角的装置。



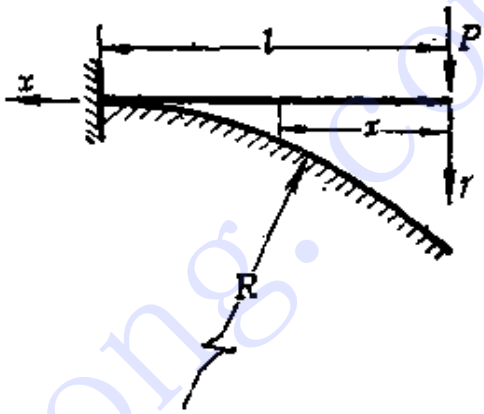
题 6.132 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*6.133 一般材料力学实验室往往备有等强度悬臂梁，用以校正电阻片的灵敏系数，如图所示。若梁长为 l，厚度为 t，在 P 力作用下百分表的读数为 f，问梁上纵向粘贴的电阻片所测出的应变 ε 与 f、t、l 有什么关系？或者说，由 f、t 和 l 等数据可获知等强度梁表面上任一点的纵向应变吗？



题 6.133 图



题 6.134 图

*6.134 如图所示，悬臂梁在固定端与一刚性圆柱面相接触，试用分析结果回答下列问题：

（1）P 为多大时（设此时为 P_1），挠曲后的梁不会与圆柱面的其他点相接触？

（2）当 $P=P_2>P_1$ 时，比如梁在 x 处刚好与圆柱面接触。试给出 P_2 的大小和此时自由端的挠度。

（3）加到 P_2 以后，若外力按比例增加，自由端的挠度是否也按比例增加？

6.135 一些受力构件，由于设计上的需要，常常对某些截面有局部的削弱，如注油孔、键槽等等。为什么这种局部削弱对弯曲构件的强度有一定的影响，而对刚度的影响则可忽略不计？试举例说明。

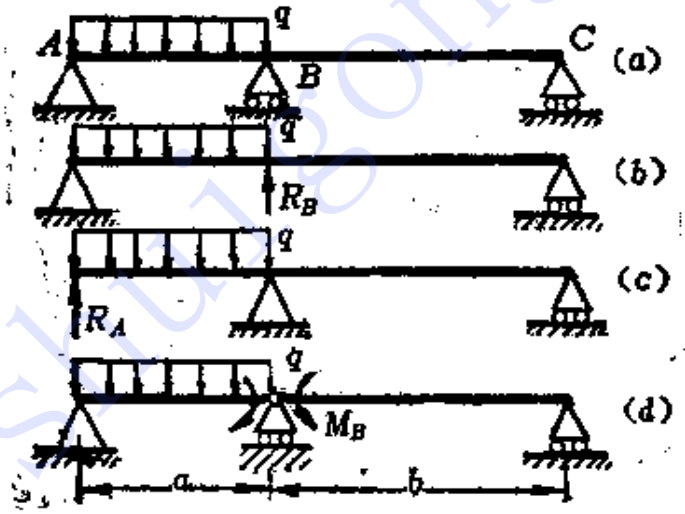
*6.136 早在胡克定律发表之前约1500年，我国汉代古籍中就有一段有趣的记载。东汉经学家郑玄（公元127～200年）对

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

《考工记·弓人》中“量其力，有三均”作注释时写道：“假令弓力胜三石，引之中三尺，弛其弦，以绳缓擐之，每加物一石，则张一尺。”这句话的大意是：假定弓能承受三石的力，相应地它中央的挠度为三尺，若将弦卸下，用绳松套着弓的两端，则每加一石的重物，它就张开一尺。现在我们要问：当研究力与变形的关系时，在张弓射箭或测量弓力的过程中，是否始终都符合上述线性规律？在材料力学的学习中，除了线弹性的问题之外，你是否还遇到过受弯构件的非线性弹性问题？试举例说明。

6.137 何谓基本体系①？取基本体系时，解除约束的个数有什么规定？你对列出相应变形条件中“相应”二字作何理解？

6.138 图 b、c 和 d 是图 a 所示双跨超静定梁的一些基本



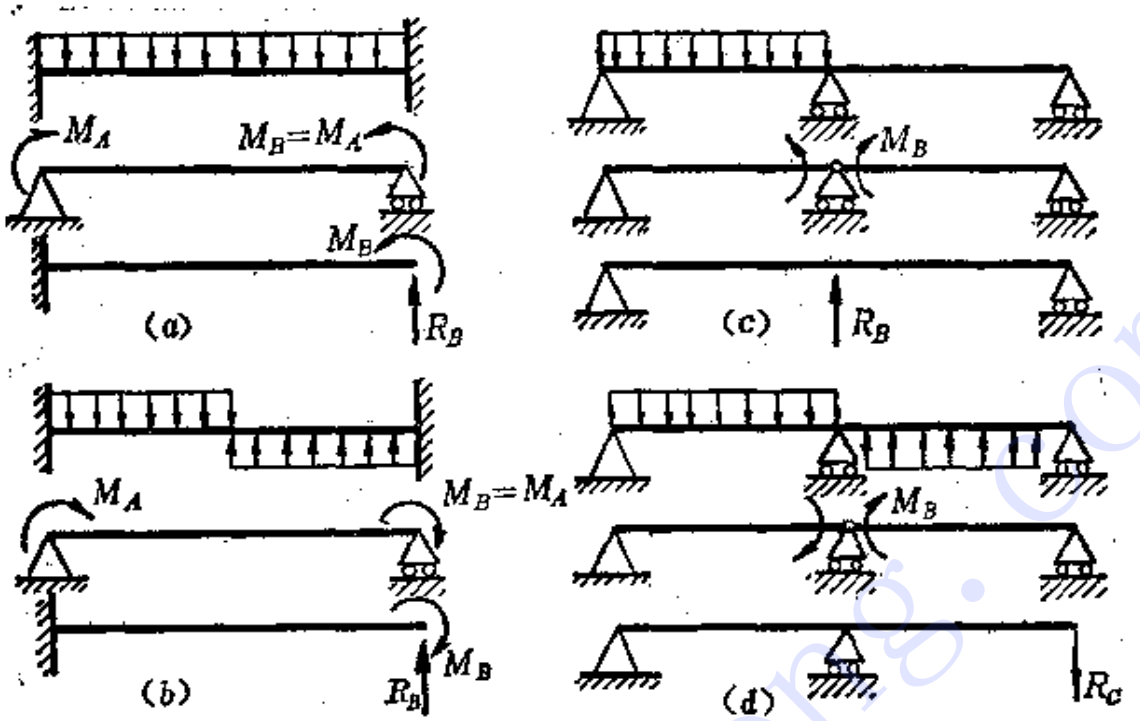
题 6.138 图

体系中比较常用的三种。试分别列出它们的变形条件。从计算工作量来看，你认为哪种基本体系较为简便？

6.139 当求解出超静定梁的多余约束力之后，你能否从直观上判断所得结果是否有误？对于图示各超静定梁，有人给出了所求得未知力的实际方向，试检查一下对不对。你是怎样判断

① 有的书叫做“静定基”、“基本静定系统”或“相当系统”，等等。

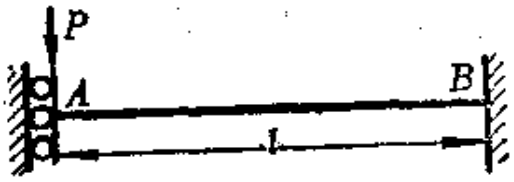
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 6.139 图

的？

6.140 图示等刚度梁一端固定、另一端滑动固定。在载荷 P 作用下可滑动端沿铅垂方向有位移，试问如何确定此位移？

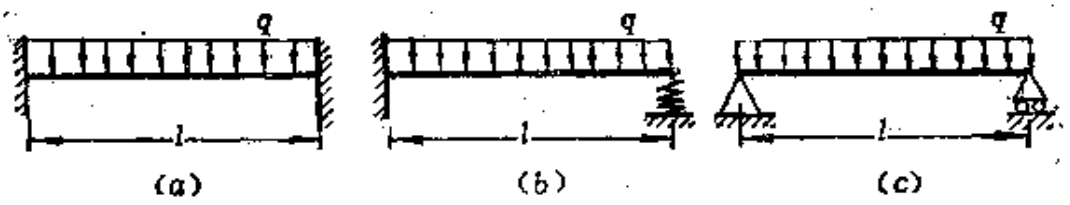


题 6.140 图

*6.141 由理论分析知道超静定梁有许多优点，如内力分配较均匀，有较大的刚度，可以节省材料等等。为什么在工程中往往还采用静定梁？

6.142 在建筑结构中，横梁两端往往搭在柱子上或嵌在砖墙里。在设计时可理想地抽象化为简支梁，实际上很难区分其两端的约束是固支还是简支。若将它抽象为图示三种约束，问按哪种约束形式进行梁的强度校核最为安全？

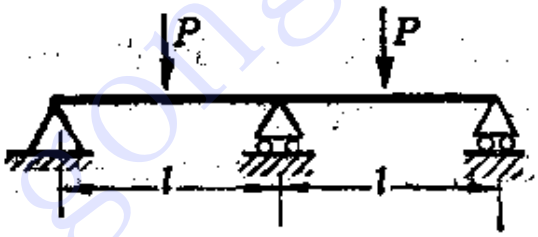
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 6.142 图

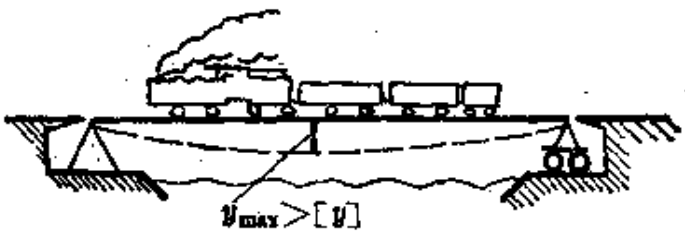
6.143 对某两端固定的等刚度梁，有人在求出其未知力后考查了它的弯矩图。他意外发现了弯矩图的总面积等于零，弯矩图面积对任一端的一次矩（面积矩）也等于零，但却不知什么缘故。你能给他做出正确的解释吗？

6.144 一等刚度双跨连续梁受力如图。设计者希望此梁工作时最大弯矩不要太大，有人认为适当改变中间支座的高度就可达到这一目的。试问这个建议是否可行？中间支座应该抬高还是降低？为什么？



题 6.144 图

6.145 建筑工程中常用的钢筋混凝土结构，在设计上布置钢筋承受拉力、混凝土承受压力，这有什么好处？今有一座钢筋混凝土结构的桥梁，如图所示。在使用中出现了险情：列车通过时跨中挠度超出了设计要求。有人说：这好办，只要中间部位再加一个桥墩就行了。试分析一下这个方案是否可行？为什么？并请你提出一个可行的方案来。

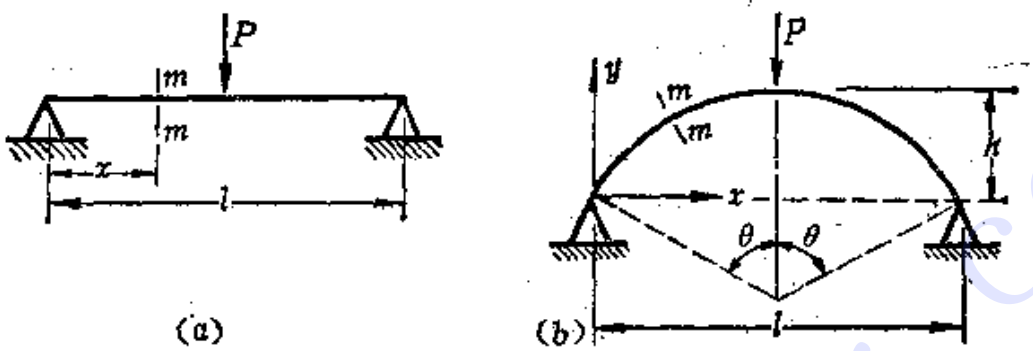


题 6.145 图

6.146 在两个固定铰支座之间，装上一条直杆，承受横向

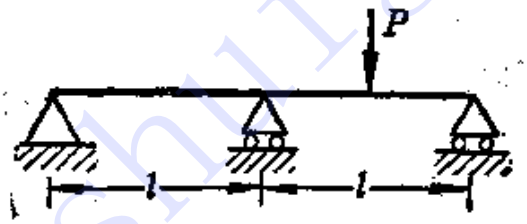
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

载荷 P，构成一次超静定结构（图 a）。若改用一条曲杆，也是一次超静定结构（图 b，称为拱）。若两者载荷和跨度 l 都相同，试比较任意截面上的内力素有何异同。



题 6.146 图

6.147 图示一等刚度双跨超静定梁，可用分析的方法求出支反力。今拟通过实测来测量支反力，以便与分析所得结果相比较，试设计此实验装置（包括提出所需测量仪表）。

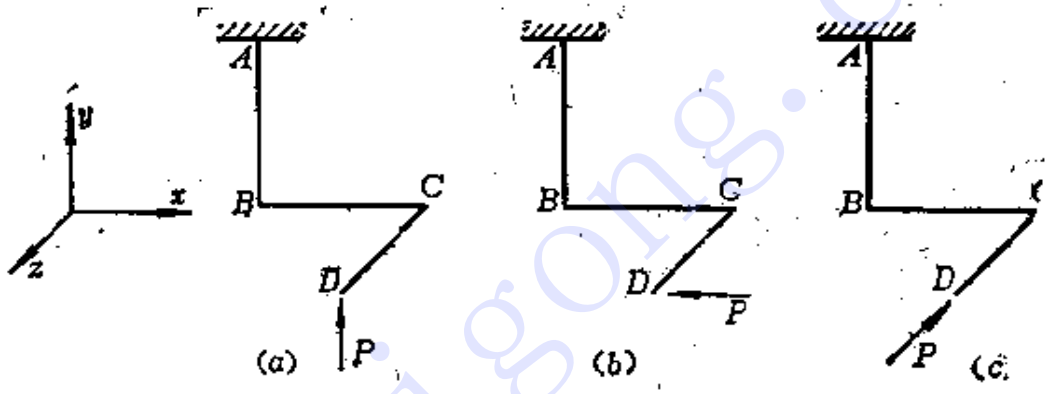


题 6.147 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

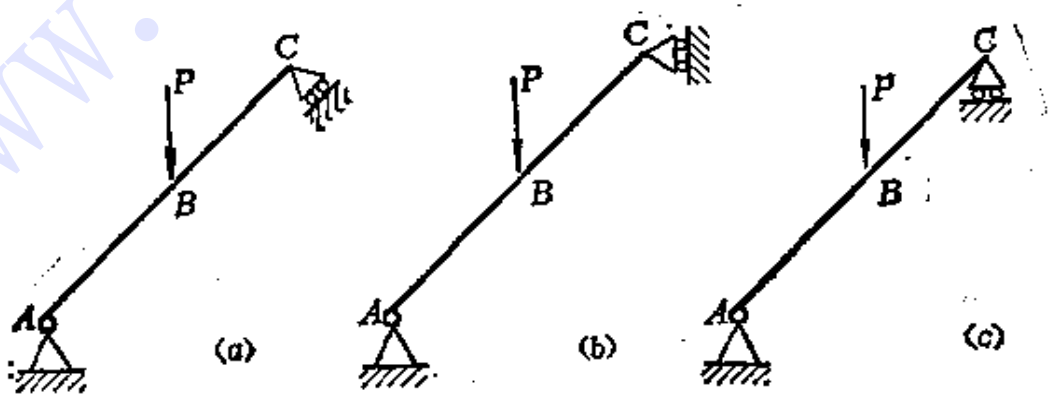
第七章 组合变形

7.1 试分析图示三种受力情况下刚架 AB 段各属于哪些基本变形的组合。若 AB、BC 和 CD 各段长度均为 l，试比较三种情况在截面 A 上的内力素。



题 7.1 图

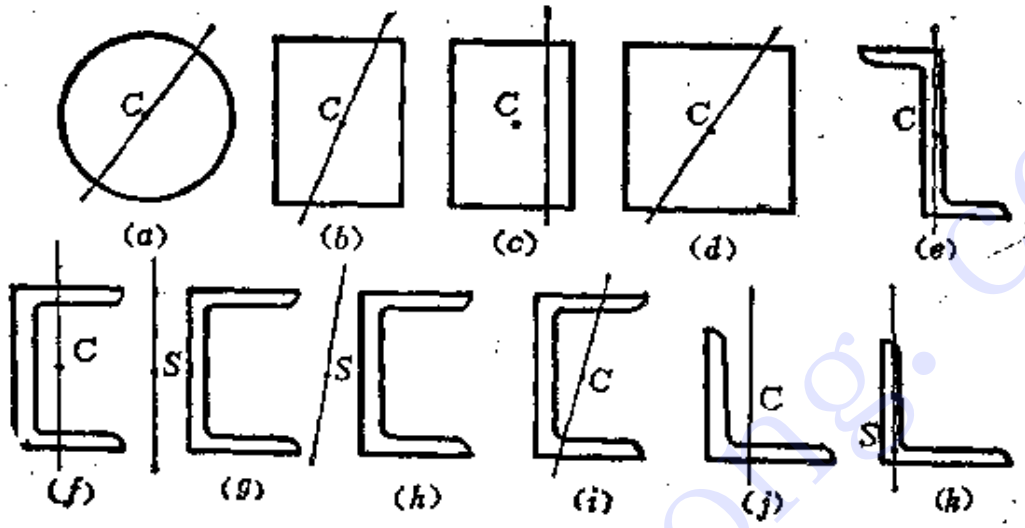
7.2 图中所示三种斜置的梁，除了支座 C 有差别外，其余都相同。试判断这三种情况下梁的 BC 段各产生什么变形。



题 7.2 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

7.3 悬臂梁在自由端受到横向集中力作用。图示各种不同的截面形状和力的作用线，其中 C 为形心，S 为弯心。试判断各梁将产生什么变形。



题 7.3 图

7.4 直杆分别在所列的外力作用下，试判断将产生什么变形（除横向力与轴线垂直外，所写力平面均与轴线平行）。

外力
- 纵向力
  - 通过截面形心，产生_____
  - 不通过截面形心，产生_____
- 横向力
  - 通过弯心
    - 力平面与形心主惯面平行，产生_____
    - 力平面与形心主惯面不平行，产生_____
  - 不通过弯心
    - 力平面与形心主惯面平行，产生_____
    - 力平面与形心主惯面不平行，产生_____

7.5 对于组合变形的杆件，在什么条件下可以进行应力叠加？在什么情况下则不能利用应力叠加的方法？试举例说明。

7.6 试通过下表比较斜弯曲与平面弯曲的主要区别。

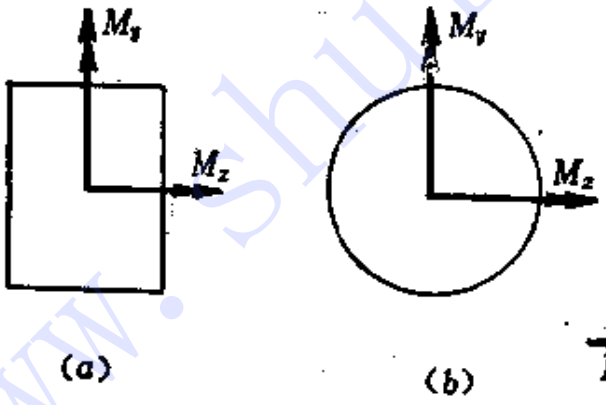
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

变形形式	受力特点	中性轴位置	挠度曲线
平面弯曲			
斜弯曲			

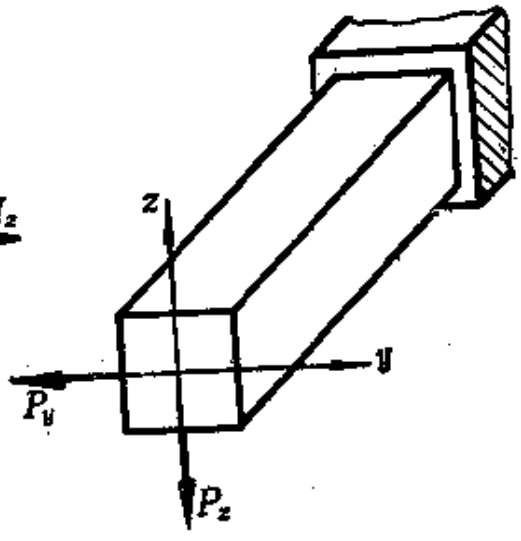
7.7 等截面直梁在斜弯曲时，平面假设是否适用？各横截面上中性轴的位置是否都相同？进行强度计算时，是否先要确定中性轴的位置，然后才能确定危险点的位置、计算危险点的应力？

7.8 矩形截面梁斜弯曲时，当外力平面与矩形对角线和梁轴线所组成的平面重合时，是否中性轴与另一对角线重合？

7.9 图示矩形和圆形截面直杆的弯矩为 M_y 和 M_z，它们的最大正应力是否都可以用公式 $\sigma_{max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}$ 计算？为什么？



题 7.9 图



题 7.10 图

7.10 由于正方形截面对于任一对正交形心轴的惯积都等于零，所以只要横向力通过形心，它就产生平面弯曲而永远不会产生斜弯曲，对吗？于是，对图示的梁可以仿效圆截面采用如下的

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

强度条件：

$$\sigma_{max}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{W}=\frac{M_b}{\frac{a^3}{6}}\leqslant[\sigma]$$

对吗？

7.11 以矩形和圆形截面为例，试分别说明梁沿轴线受到多个不在同一纵向平面内的横向外力作用发生弯曲时，如何确定危险面和危险点的位置。

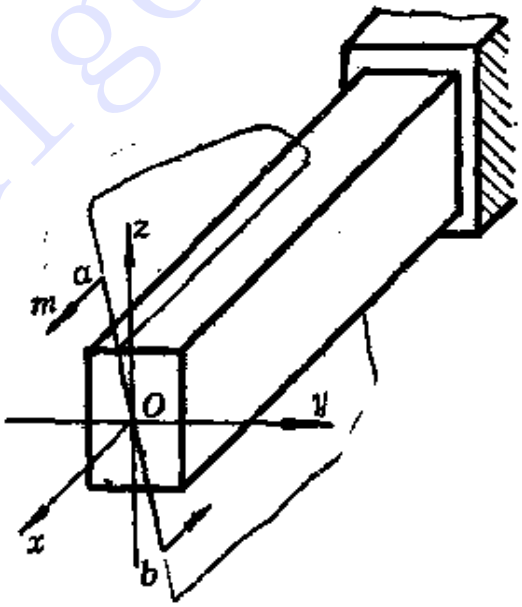
7.12 工厂厂房的人字形屋架上的桁条，采用工字形还是Z字形截面为好？为什么？

7.13 在斜弯曲的情况下，梁的总挠度可以计算如下：

$$f=\sqrt{f_y^2+f_z^2}$$

那么；梁的总转角应如何计算？

*7.14 一矩形截面悬臂梁在自由端受一力偶 m 作用如图，当 m 的作用平面 ab 绕梁的轴线 x 转动一周时，梁端截面形心将描绘出什么样的曲线？如果是正方形截面，又将如何？

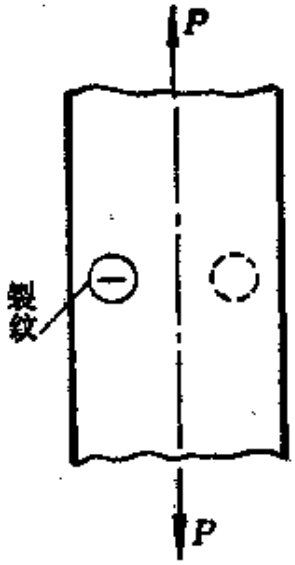


题 7.14 图

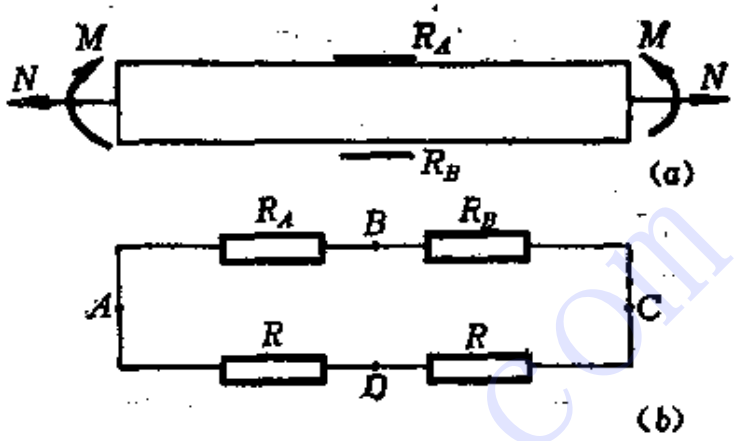
7.15 拉压和弯曲的组合变形，与偏心拉压有何区别和联系？

7.16 图示一受轴向拉伸的杆件，今发现一侧有裂纹。为了防止裂纹扩大，修理工厂在裂纹处钻了一个尺寸不大的圆孔，并将它的边缘加以修整。有人建议在另一侧对称处再钻一个同样的小孔，这是否合理？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



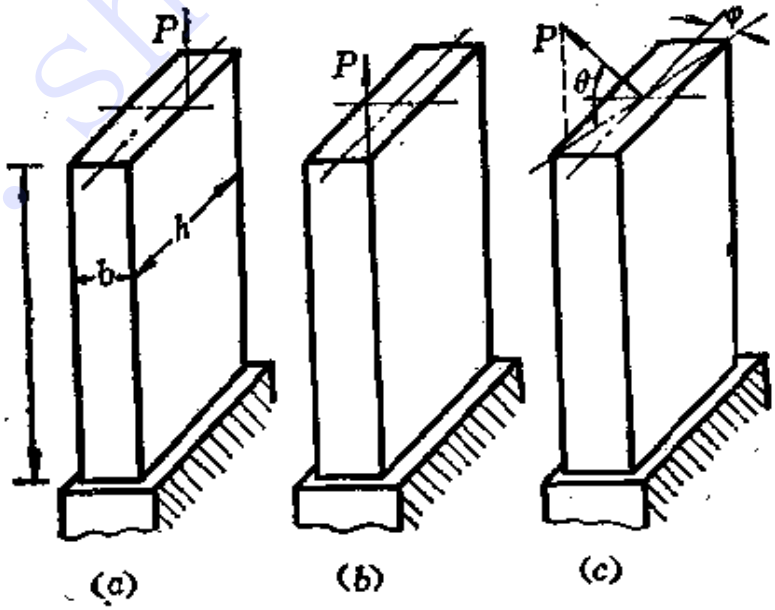
题 7.16 图



题 7.17 图

7.17 一拉弯组合变形的等直杆，在两侧沿轴线方向各粘贴了一电阻应变片，如图 a 所示。（1）按图 b 所示的半桥式接线方法，能测出什么内力？应变仪读数与所测出的内力有怎样的关系式？（2）如果要测另一个内力，应怎样接线？此时应变仪读数与所测的内力又有怎样的关系式？

7.18 尺寸相同的三根矩形截面杆，它们的受力情况分别如

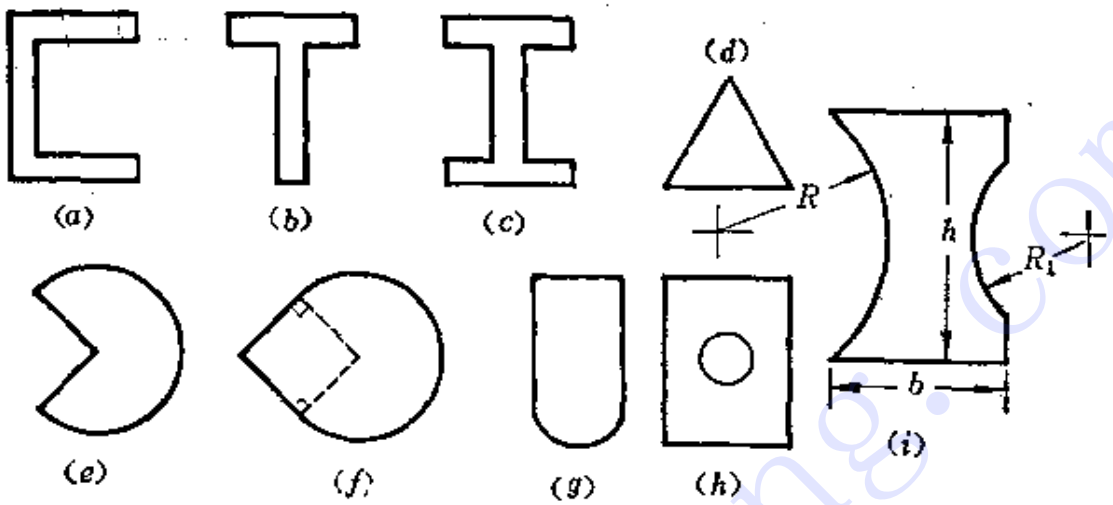


题 7.18 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

图 a、b 和 c 所示。试指出各杆内最大正应力所在的位置和危险面上中性轴的位置。

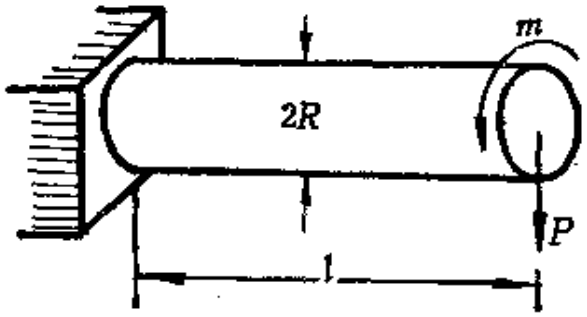
*7.19 试大致画出图示各截面的截面核心形状。



题 7.19 图

*7.20 受扭的薄片同时受拉，其扭转刚度有无变化？受弯的薄片同时受拉，其弯曲刚度有无变化？如何通过实验测定这种变化？

7.21 圆杆受力和尺寸如图，已知材料的弹性模量 E 和剪切弹性模量 G。今用电测法分别单独测出转矩 m 和集中力 P，（1）电阻应变片应如何粘贴？（2）如何用电阻应变仪的读数值计算出所求的 m 和 P 值？



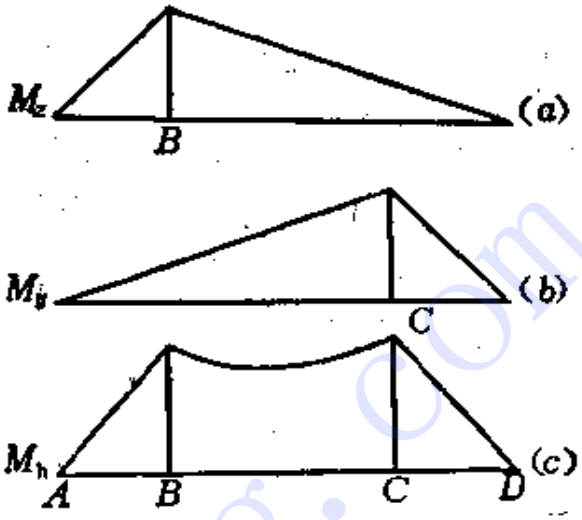
题 7.21 图

*7.22 已知圆杆沿两正交轴 y 和 z 的弯矩图 M_z 和 M_y 图，如图 a 和 b 所示。试证明合弯矩图在 AB 和 CD 两段是直线，BC 段是上凹的双曲线，如图 c 所示。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

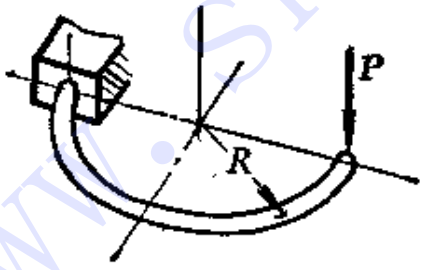
7.23 圆形、正方形和矩形截面等直杆受到扭弯组合变形时，截面上危险点的位置如何判定？它们可能各在危险面的哪些点上？

7.24 矩形截面杆受力如图。试判断底截面上哪些点可能是危险点，并画出这些点的应力状态。

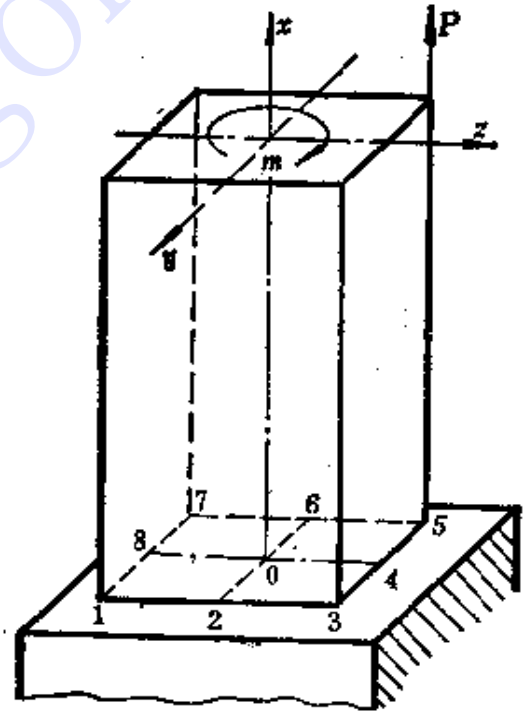


题 7.22 图

7.25 圆截面半圆弧形曲杆水平放置，一端固定，自由端受铅垂载荷作用，如图所示。（1）可能的危险面和危险点在哪里？（2）危险点的应力状态如何？（3）若用不同的强度理论进行核算，其危险面和危险点的位置是否相同？为什么？



题 7.25 图



题 7.24 图

7.26 圆轴双向弯曲变形时，为什么可以由两正交方向的弯

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

矩 M_y 和 M_z 先求出合弯矩 $M_h=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$，然后根据 M_h 求弯曲正应力？矩形截面杆在斜弯曲时为什么不这样做？正多边形截面的杆件又如何？

7.27 杆件扭弯组合变形时，各危险点是否都要采用强度理论来核算强度？对于圆杆，能否分别按 $\sigma_{max}=\sqrt{M_y^2+M_z^2}/W\leqslant[\sigma]$ 和 $\tau_{max}=M_n/W_p\leqslant[\tau]$ 进行强度计算？

7.28 一钢质正方形截面杆受扭弯组合作用时，若已算得危险面的合弯矩 M_h 和扭矩 M_n，危险面上危险点的正应力 σ 和剪应力 τ，以及抗弯截面系数 W。问下列强度条件中哪些是合适的？

（1）$\sigma\leqslant[\sigma]$，$\tau\leqslant[\tau]$；

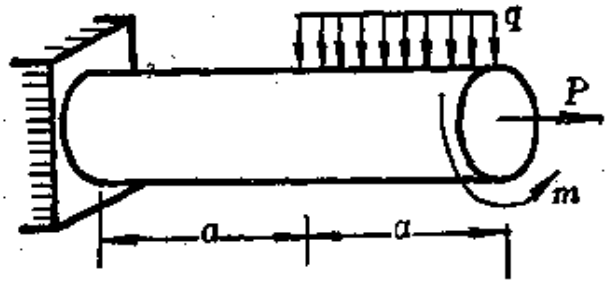
（2）$\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}\leqslant[\sigma]$；

（3）$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma]$；

（4）$\frac{1}{W}\sqrt{M_h^2+0.75M_n^2}\leqslant[\sigma]$。

7.29 圆杆受力如图。（1）危险面和危险点在哪里？（2）危险点的应力状态如何？（3）按第三强度理论，有人列出下面两种形式的强度条件：

$$\frac{P}{A}+\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2+4\left(\frac{m}{W_p}\right)^2}\leqslant[\sigma]$$



题 7.29 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\sqrt{\left(\frac{F}{A}+\frac{M}{W}\right)^2+4\left(\frac{m}{W_p}\right)^2}\leqslant[\sigma]$$

问哪一种是正确的？为什么？

7.30 同一个强度理论，其强度条件往往写成不同的形式。以第三强度理论为例，我们常用的有以下三种形式。

（1）$\sigma_{xd_3}=\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma]$；

（2）$\sigma_{xd_3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma]$；

（3）$\sigma_{xb_3}=\frac{1}{W}\sqrt{M_h^2+M_n^2}\leqslant[\tau]$。

问它们的适用范围是否相同？为什么？

7.31 为了消除薄壁圆筒扭转时所产生的压应力，以防止失稳，可以采用对筒打内压的方法（筒的两端封闭）。若已知它的扭转剪应力为 τ，仅受内压时的轴向正应力 σ_x 和环向正应力 σ_z，且 $\sigma_z=2\sigma_x$。问当 σ_x 与 τ 成怎样的关系时，内压的作用正好抵消扭转所引起的压应力（用应力圆说明）？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第八章　变形能法

8.1　变形能的值与施加载荷的先后次序有无关系？如果力系中某一载荷引起了塑性变形，情况又将如何？

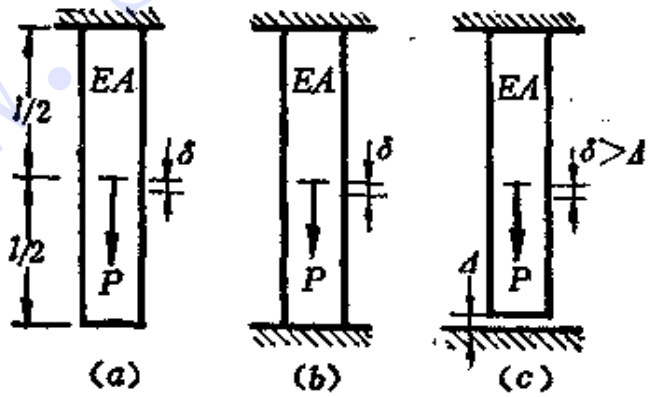
8.2　当杆件中同时存在轴力、扭矩和弯矩等内力素时，为什么可以把总变形能写成如下的形式？这是否利用了叠加原理？

$$U=\int_s \frac{N^2(s)\mathrm{d}s}{2EA}+\int_s \frac{M_n^2(s)\mathrm{d}s}{2GI_p}$$

$$+\int_s \frac{M_1^2(s)\mathrm{d}s}{2EI_1}+\int_s \frac{M_2^2(s)\mathrm{d}s}{2EI_2}$$

*8.3　如果考虑到大曲率曲杆的曲率的影响，变形能公式该如何修正？

8.4　图示各杆件在中点处受到大小不同的静力P作用，在线弹性范围内，力作用点的最终位移是δ。那么，图中三种情况下力P所作的功都是$P\delta/2$吗？杆件所储存的变形能都是$2c\delta^2$吗？其中$c=EA/l$，是杆件的拉伸刚度。



题 8.4 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

8.5 试判断图示各种情况杆件或单元体变形能的下列叠加形式是否正确：

图a $U(P, m) = U(P) + U(m)$

图b $U(P, Q) = U(P) + U(Q)$

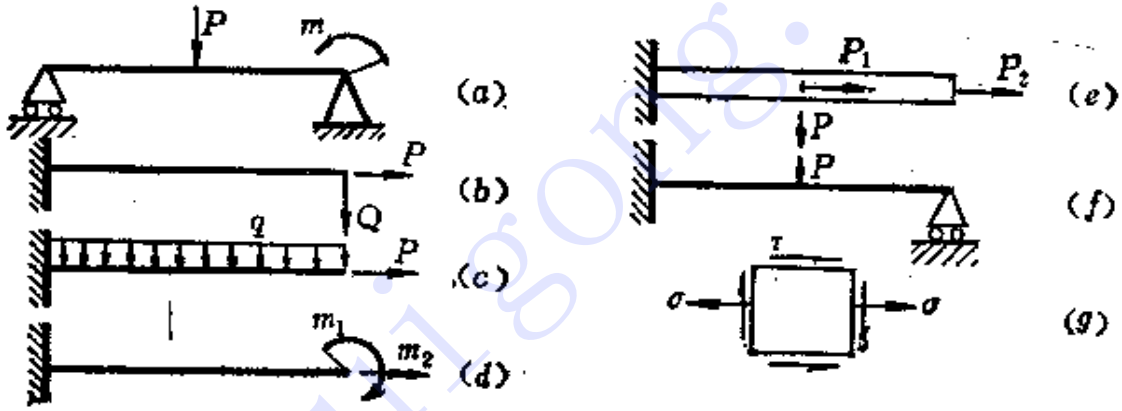
图c $U(P, q) = U(P) + U(q)$

图d $U(m_1, m_2) = U(m_1) + U(m_2)$

图e $U(P_1, P_2) = U(P_1) + U(P_2)$

图f $U(2P) = 2U(P)$

图g $u(\sigma, \tau) = u(\sigma) + u(\tau)$



题 8.5 图

8.6 已知单元体的主应力和主应变分别为σ_1、σ_2、σ_3和ε_1、ε_2、ε_3，则比能$u = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$，这是否采用了叠加原理？

8.7 用单向应力状态的比能公式$u = \sigma^2/2E$和纯剪状态的比能公式$u = \tau^2/2G$，是否可以导出下列杆件弯曲时的变形能公式？

$$U = \int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI} + \int_l k\frac{Q^2(x)\mathrm{d}x}{2GA}$$

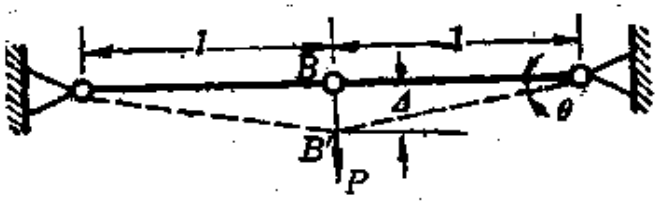
其中 $k = \frac{A}{I^2}\int_A \left(\frac{S}{b}\right)^2 \mathrm{d}A$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

8.8 在什么条件下构件的总变形能等于比能u乘以构件的体积？

8.9 什么是虚位移？什么是虚功？虚功与实功有什么区别？

8.10 设图示两水平杆的刚度EA相同(材料服从胡克定律)，试求此结构的变形能。



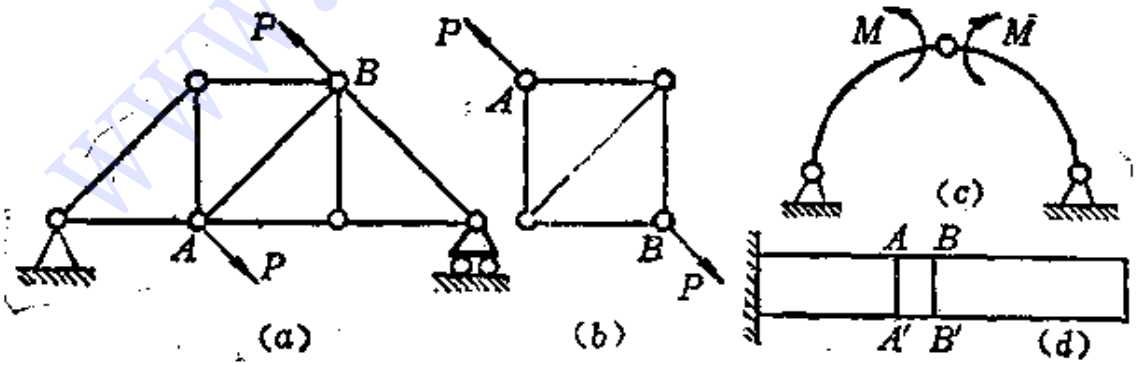
题 8.10 图

8.11 设圆棒状橡胶拉伸试件的初始直径为d_0，标距为l_0，近似作为不可压缩材料而将泊松比μ取为1/2，其应力应变关系近似为

$$\sigma=\frac{E_0}{3}\left[(1+\varepsilon)-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right]$$

其中E_0为初始切线模量。试估算标距段伸长为Δl时所储存的变形能。

8.12 图a、b和c各结构中所示力系对应于怎样的广义位移？求图d杆件中的下列位移时，应加怎样的广义力？（1）截面AA'沿AB方向平移；（2）AA'与BB'之间的伸长或缩短；（3）

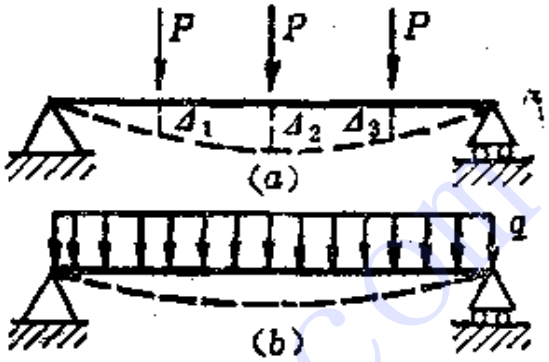


题 8.12 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

BB'绕垂直于纸面的轴转动；（4）AA'在横截平面内转动。

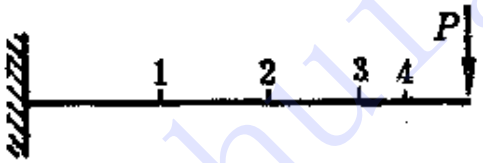
8.13 设图a中对应于三个集中力的位移分别为Δ_1、Δ_2和Δ_3，若把三个力看成是一个广义力，它所对应的广义位移是什么？把图b中梁上的整个均布载荷视为广义力时，所对应的广义位移又是什么？



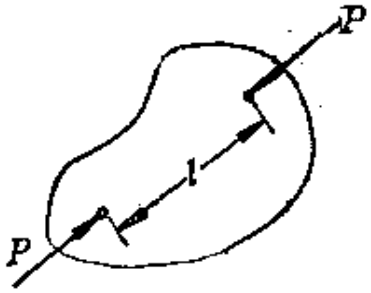
题 8.13 图

8.14 变形体的虚位移原理与刚体的虚位移原理有什么联系和区别？

8.15 怎样用一个位置固定的挠度计（例如百分表），依次测量出图示自由端受集中力P的悬臂梁在1至4各截面处的挠度？能不能用测量挠度的办法测出梁上多处位置的转角？



题 8.15 图



题 8.16 图

*8.16 如何计算图示任意形状的弹性体在两个大小相等、方向相反的力P作用下的体积变化（已知力作用点间的距离l和材料的弹性常数）。

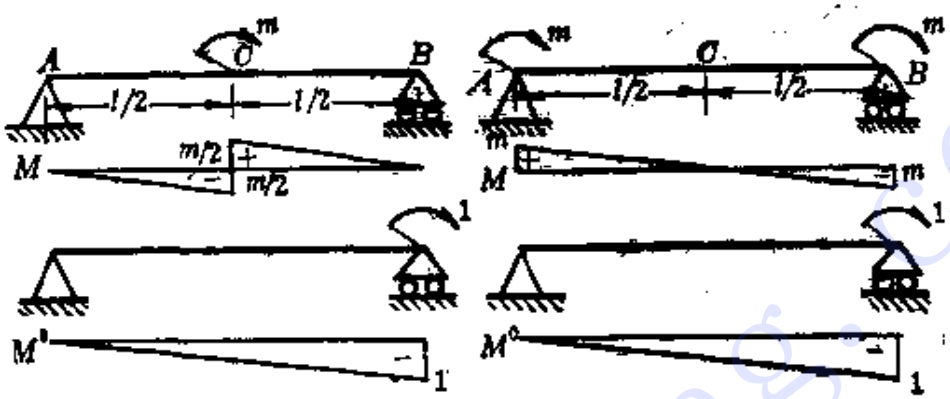
8.17 功的互等定理和位移互等定理，与莫尔公式有什么联系和区别？试从前者导出后者，再反过来从后者导出前者。

8.18 用莫尔法求位移时，若所得结果为正，则位移方向与单位力方向一致，这是什么缘故？

8.19 用图乘法计算图示两梁在B处的转角时，有人认为因

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

梁的M图的总面积等于零，所以不论M_C^0有多大，乘积ωM_C^0总是零；也有人认为M图面积不能正、负抵消，应按绝对值相加，所以总面积都不等于零，其形心都在中点C处。你觉得这两种看法对不对？为什么？



题 8.19 图

8.20 试判断图示各种情况中图乘法的下列计算是否正确，并说明其理由。

图a $\int_l MM^0\mathrm{d}x=\omega_1M_{C1}^0+\omega_2M_{C2}^0$

图b $\int_l MM^0\mathrm{d}x=\omega M_C^0$

图c $\int_l MM^0\mathrm{d}x=\omega M_C^0$

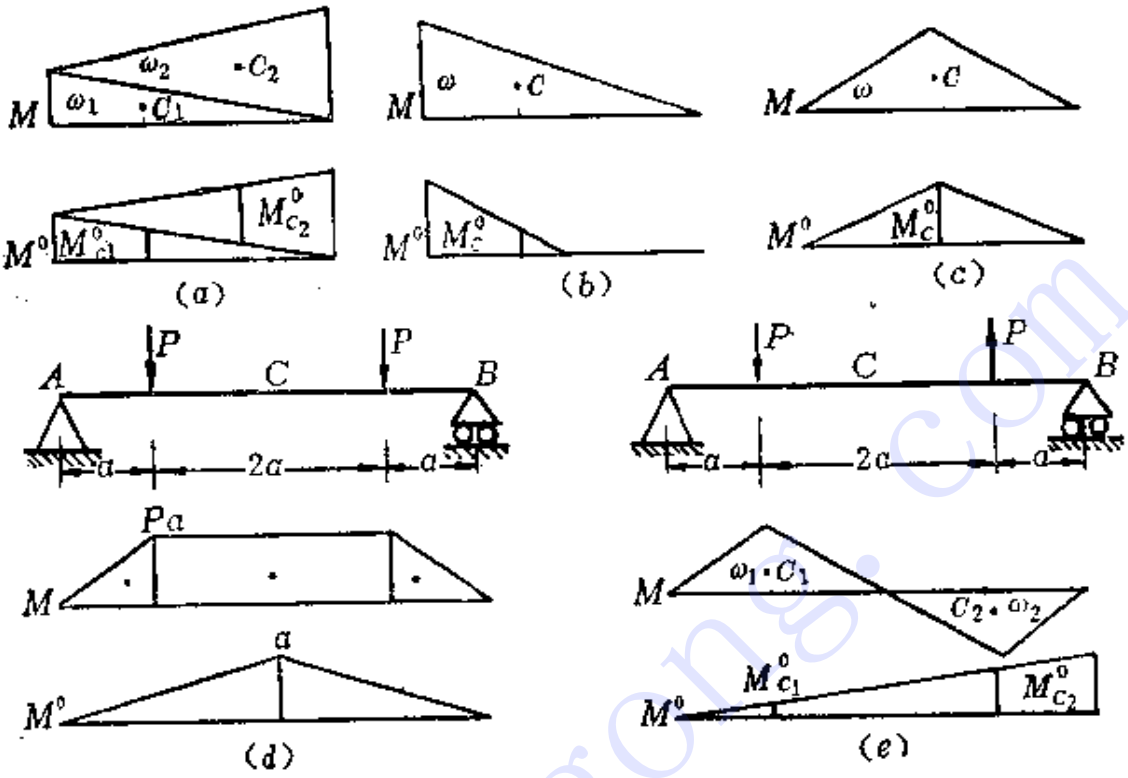
图d $EIy_C=2\left(\frac{Pa^2}{2}\times\frac{a}{3}\right)+2Pa^2\times a=\frac{7}{3}Pa^3$

图e $\because\omega_1=\omega_2=\omega$

$\therefore EIQ_B=\omega_1M_{C1}^0+\omega_2M_{C2}^0$

$=\omega(M_{C1}^0+M_{C2}^0)$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 8.20 图

8.21 用图乘法求图示等刚度梁中点 C 处的转角，下列计算是否正确？并说明其理由。

（1） $$\theta_C=\frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{ql^2}{8}\quad\frac{l}{2}\right)(-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(-\frac{3ql^2}{8}\right)\frac{l}{2}(-1)\right]$$

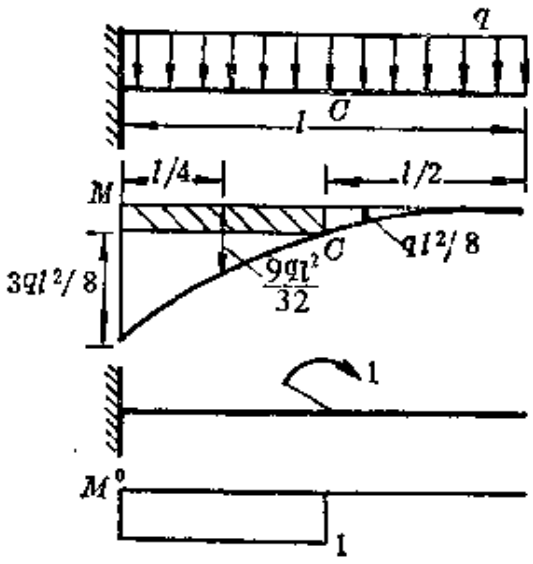
$$=\frac{ql^3}{8EI}$$

（2）采用倒乘法

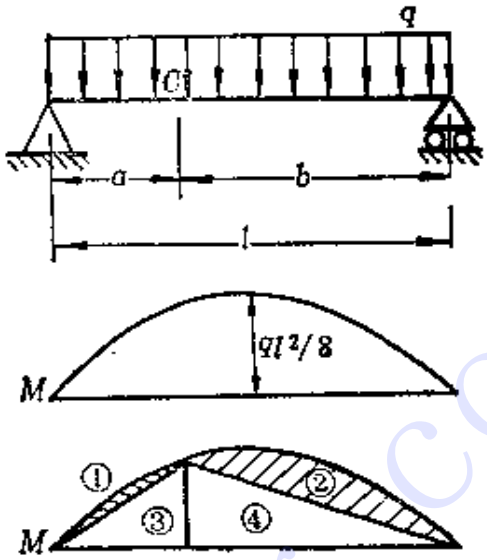
$$\theta_A=\frac{1}{EI}\left(-1\cdot\frac{l}{2}\right)\left(-\frac{9ql^2}{32}\right)$$

$$=\frac{9ql^3}{64EI}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 8.21 图



题 8.22 图

8.22 用图乘法求图示梁端部的转角时，弯矩图的面积为

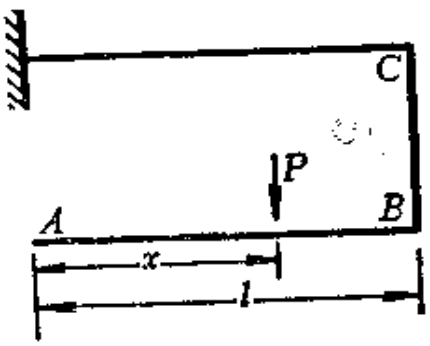
$$\omega=\frac{2}{3}\left(\frac{ql^2}{8}\right)l$$

若求 C 点的挠度，则可将弯矩图分成四块，其中 1 和 2 两块的面积分别为

$$\omega_1=\frac{2}{3}\left(\frac{qa^2}{8}\right)a \quad 和 \quad \omega_2=\frac{2}{3}\left(\frac{qb^2}{8}\right)b$$

沿 x 轴形心位置均在这两块图形的中间。试证明这个结果，并应用于上一题中。

8.23 图示一等刚度平面刚架，载荷 P 沿 AB 段移动，其最理想的位置是使节点 C 的铅垂位移等于零。你有没有简便的方法，直接给出 x 值？



题 8.23 图

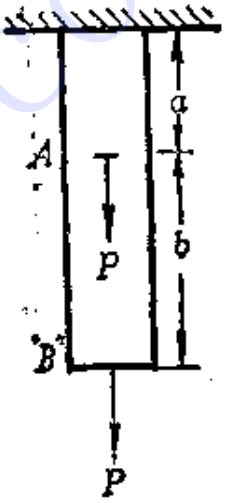
8.24 莫尔定理与卡氏定理有什么相同和不同之处？它们之中的 $M^0(x)$ 与 $\frac{\partial M(x)}{\partial P_j}$ 有什么不同？卡氏定理、莫尔定理和图乘法的使用

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

范围各有什么限制？

8.25 应用卡氏定理时，为什么有时要引入附加力P_f？在对P_f求导之后要令它等于零，又何必要加上它？而$\frac{\partial U}{\partial P_f}$和$\frac{\partial M}{\partial P_f}$并不等于零，这又是什么原因？

8.26 等刚度EA的杆件受力如图，对于杆件的变形能U和B截面的铅垂位移δ_B，下列各种计算是否有错误？错在哪里？



题 8.26 图

（1） $$U_1=\frac{P^2a}{2EA}+\frac{P^2(a+b)}{2EA}$$

$$=\frac{P^2a}{EA}+\frac{P^2b}{2EA}$$

$$\delta_B=\frac{\partial U_1}{\partial P}=\frac{2Pa}{EA}+\frac{Pb}{EA}$$

（2）由 $$U_1=\frac{1}{2}P\delta_B$$

得 $$\delta_B=\frac{2Pa}{EA}+\frac{Pb}{EA}$$

（3） $$U_2=\frac{(P+P)^2a}{2EA}+\frac{P^2b}{2EA}$$

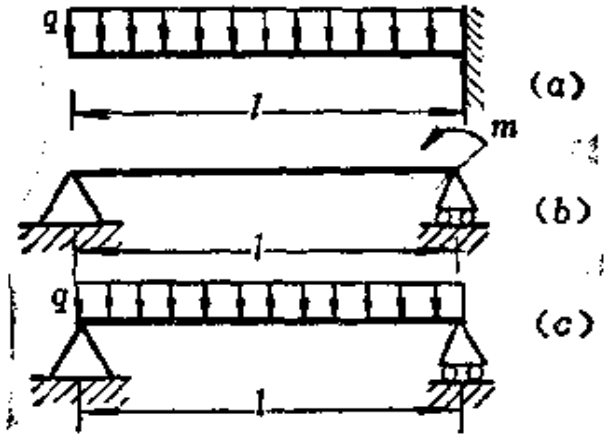
$$=\frac{2P^2a}{EA}+\frac{P^2b}{2EA}$$

$$\delta_B=\frac{\partial U_2}{\partial P}=\frac{4Pa}{EA}+\frac{Pb}{EA}$$

（4）由 $U_2=\frac{1}{2}P\delta_B$ 得 $\delta_B=\frac{4Pa}{EA}+\frac{Pb}{EA}$

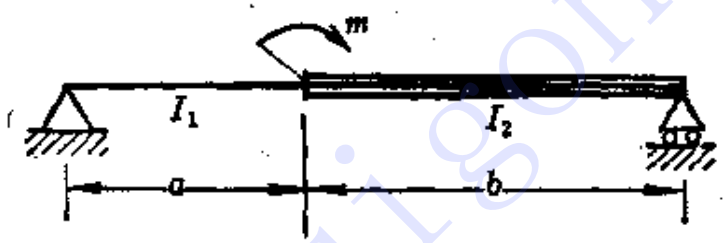
8.27 卡氏定理和单位载荷法是否只能用来求某一指定截面处的位移？能不能用它们来求出图示三个梁的挠曲线方程？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 8.27 图

8.28 变截面梁受力如图，若力偶作用处挠度为零，问有什么简便的方法确定I_1与I_2之比值？



题 8.28 图

*8.29 怎样利用内力图来计算梁在变形前、后轴线之间所围的面积？

*8.30 圆环在环的平面内的力系作用下，若不计轴力和剪力对变形的影响，它在变形后所包围的面积有没有变化？

8.31 等刚度悬臂梁受力如图，有人用卡氏定理计算如下：

AB段，$M=-Px$，$\dfrac{\partial M}{\partial P}=-x$

BC段，$M=-P(a+x)-Px$

$=-P(a+2x)$

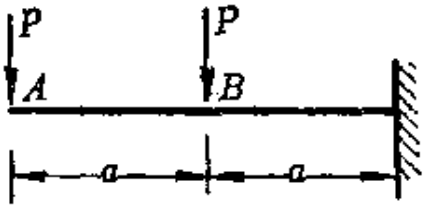
$\dfrac{\partial M}{\partial P}=-(a+2x)$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

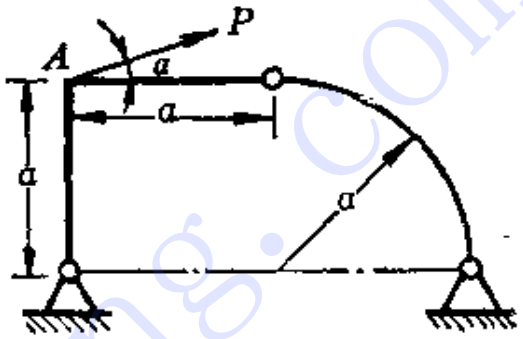
则 $$\delta=\int_o^a\frac{Px^2\mathrm{d}x}{EI}+\int_o^a\frac{P(a+2x)^2\mathrm{d}x}{EI}$$

$$=\frac{14Pa^3}{3EI}$$

问所求出的δ代表哪一点的位移？此梁所储存的变形能是多少？



题 8.31 图

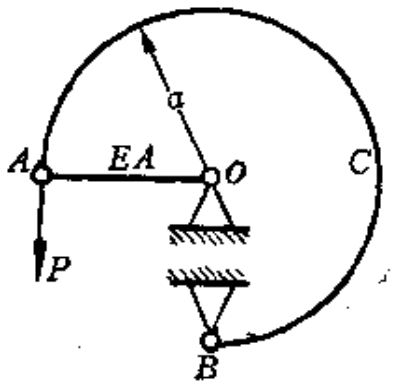


题 8.32 图

8.32 欲使任意结构上A点受力后只沿作用力P的方向产生位移（可以图示结构为例），问如何选择力的作用方位角α？

*8.33 对于图示结构，当曲杆的弹性模量分别为（1）$E=\infty$和（2）$E\neq\infty$时，如何求着力点A的铅垂位移？

8.34 图示高度为h的等刚度矩形简支梁，当温度变化后，温度沿高度呈线性分布，上、下表面分别为t_1和t_2（$t_1>t_2$）。问如何应用单位载荷法求梁的中点挠度？



题 8.33 图

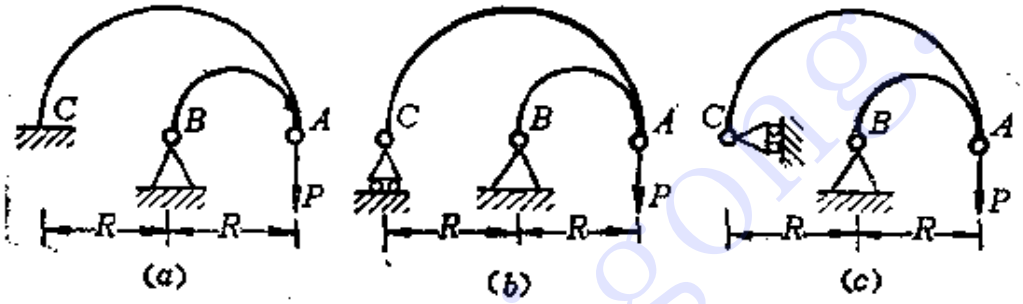
题 8.34 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第九章　超静定体系

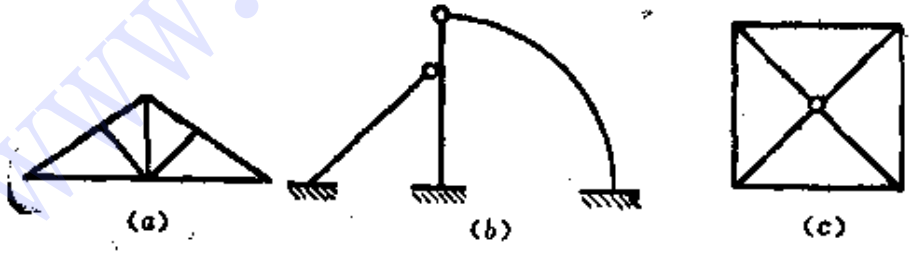
9.1　超静定结构中的多余约束是什么意思？在结构设计和求解超静定问题时，从多余约束能提供出什么条件？

9.2　两半圆弧形曲杆在A和B处铰接，C处有三种不同的约束，如图所示。试判断各种约束情况下它们是结构还是机构，是静定的还是超静定的。



题 9.2 图

9.3　判断平面刚架在同一平面内的任意力系作用下超静定的次数时，为什么每切断一根杆件就相当于除去三个约束？每解除两杆间的一个铰链就相当于除去两个约束？试判断图示刚架的超静定次数。



题 9.3 图

9.4　材料力学中推导杆件基本变形的应力分布公式时，遇到的问题是静定问题还是超静定问题？

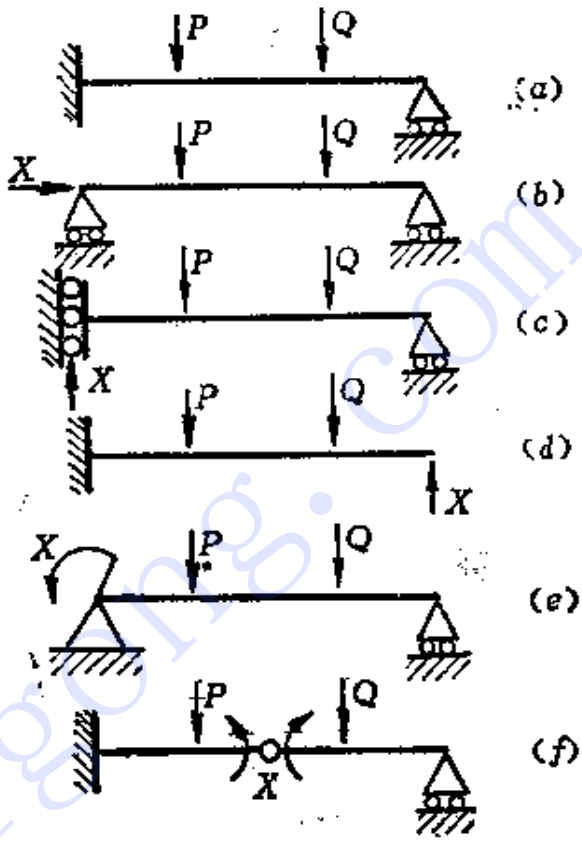
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

9.5 对图a所示超静定梁，试问图b至f所示五种基本体系是否都可用？试写出对应的变形协调条件。

9.6 为什么可以把受弯构件中的内力M和Q作为多余约束力？当把剪力作为多余约束时，截面之间的联系采取什么形式？试以图示连续梁为例予以说明。

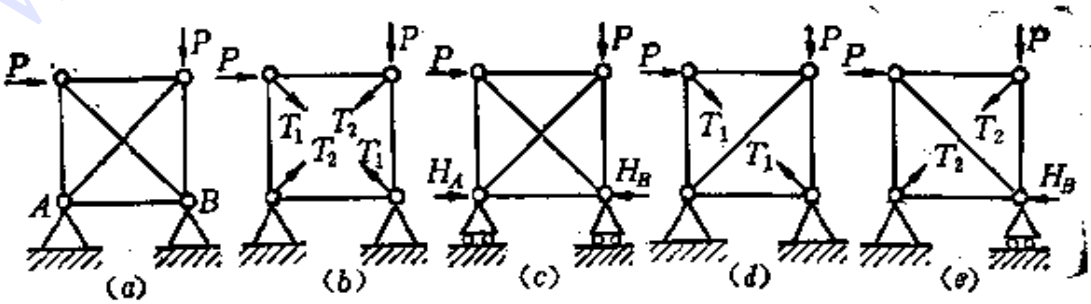
9.7 超静定桁架受力如图a，试指出图b至e所列基本体系的正误。

9.8 有人在求解图a所示超静定结构时不引用平衡条件，而解除了全部约束，写出如图b所示



题 9.5 图

题 9.5 图



题 9.7 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

的多余约束力，并列出对应的变形协调条件。试问这样能不能得出正确的结果？为什么？

9.9 列写构件或结构的变形协调条件时，要注意依据哪些原则？

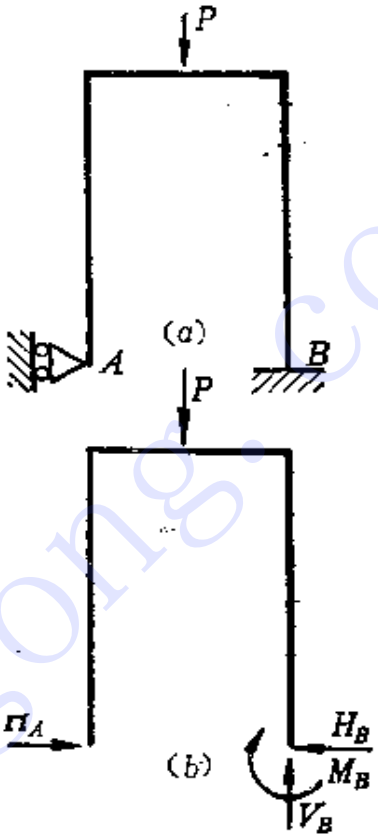
9.10 超静定结构中内力按组成构件的刚度分配，试举例说明这个特点。

9.11 更换静定结构中部分杆件的材料，而其他条件保持不变时，结构中的内力有无变化？对超静定结构又将如何？

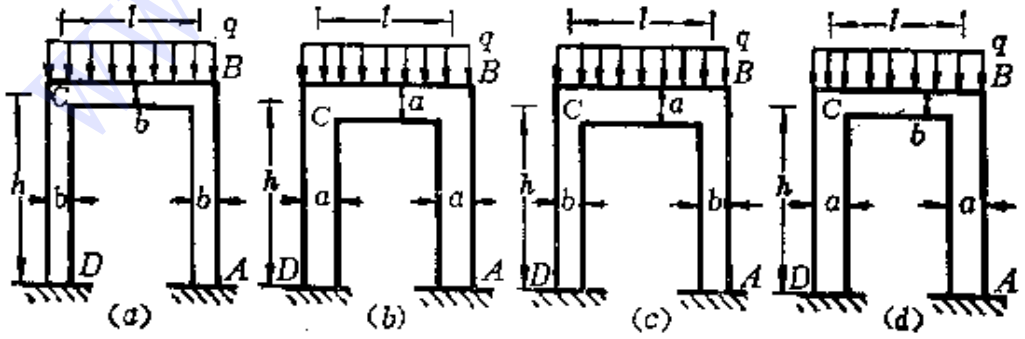
*9.12 图示四种结构中（$b=40\text{cm}$，$a=50\text{cm}$），除所示立柱和横梁的矩形截面高度有差异之外，其他条件完全相同。试说明各结构中C点处弯矩的大小次序为什么如下所列（$h=l$时）：

$$\frac{ql^2}{12}>M_{(d)}>M_{(a)}=M_{(b)}$$

$$=\frac{ql^2}{18}>M_{(c)}\neq 0$$



题 9.8 图

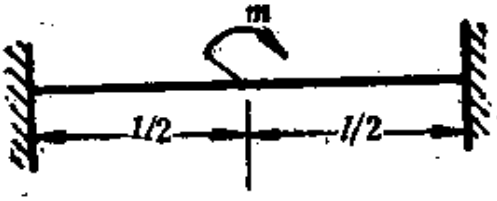


题 9.12 图

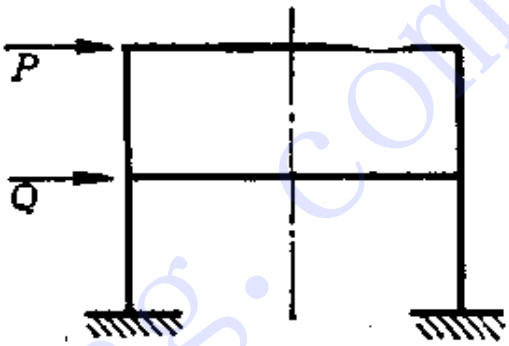
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

9.13　作完超静定问题的计算之后，用平衡条件核算无误，就可以得出此解算正确的结论吗？为什么？

9.14　对称的杆件体系在受到对称载荷作用时，在对称截面上不存在剪力。这是否一种普遍的规律？图示等刚度梁是否也属于对称杆件受对称载荷作用的情况？为什么？



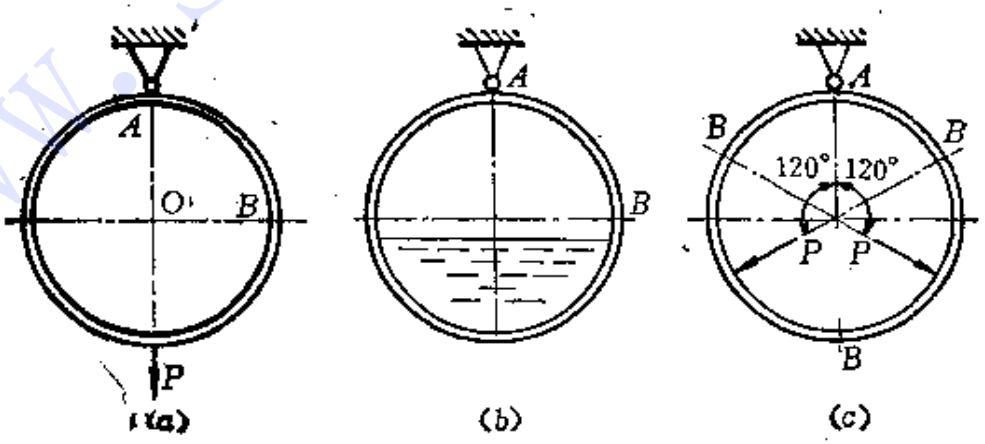
题 9.14 图



题 9.15 图

9.15　如何利用对称性和反对称性来简化超静定问题的计算？对图示的刚架应如何简化计算？

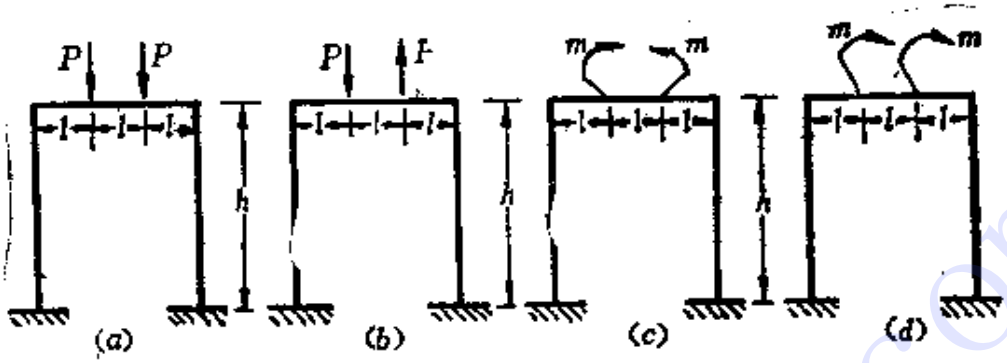
9.16　悬吊圆管足够长时，可取其单位长度的一段作为圆环处理。设此吊环处于图示三种受力状态，想想它们各是几次超静定问题。



题 9.16 图

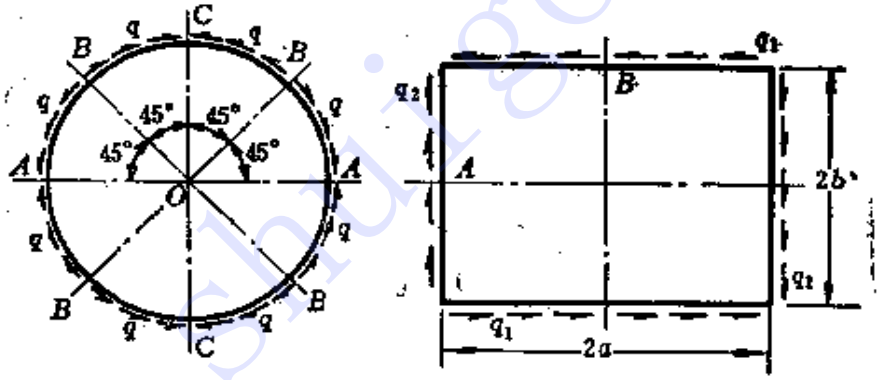
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

9.17 对图示各刚架，试选择最简单的基本体系，并注明所选的多余未知量。



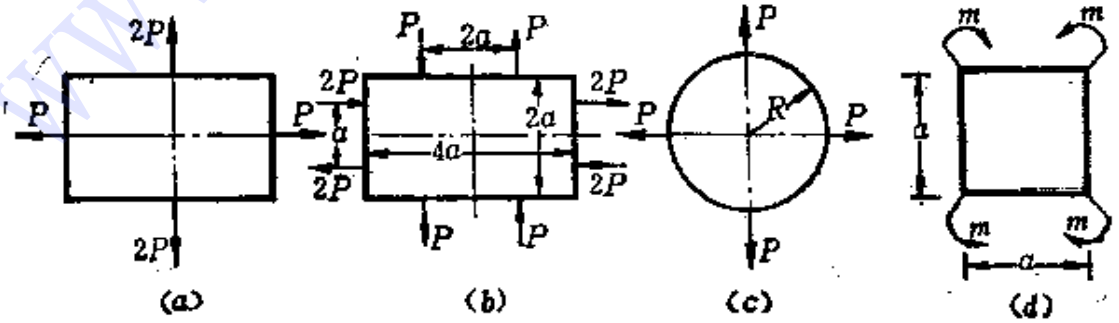
题 9.17 图

9.18 等刚度超静定圆环和矩形刚架受力如图所示，q、q_1和q_2是均布切向载荷集度。有人认为，利用正、反对称性，选取适当的示力对象，它们就可以象静定结构那样，仅用平衡条件便能求出内力。你试试看能否这样做。



题 9.18 图

9.19 试证明图示各超静定体系中，图 a 可化为一次超静定



题 9.19 图

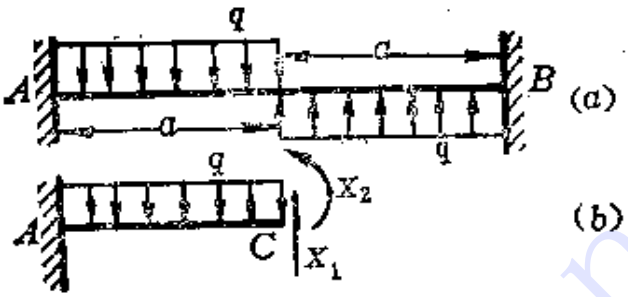
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

问题，其他的甚至可以简化成静定问题求解。

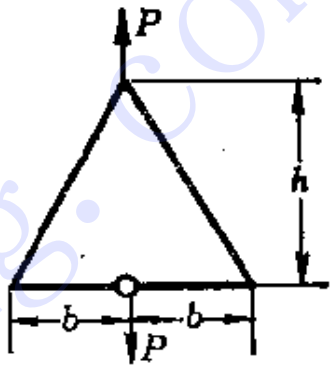
9.20　为求解图a所示等刚度梁，有人选取了图b所示的基本体系，同时列出如下的力法正则方程：

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{aligned}\qquad(a)$$

对吗？若用式（a）作为变形协调条件，应取怎样的基本体系？



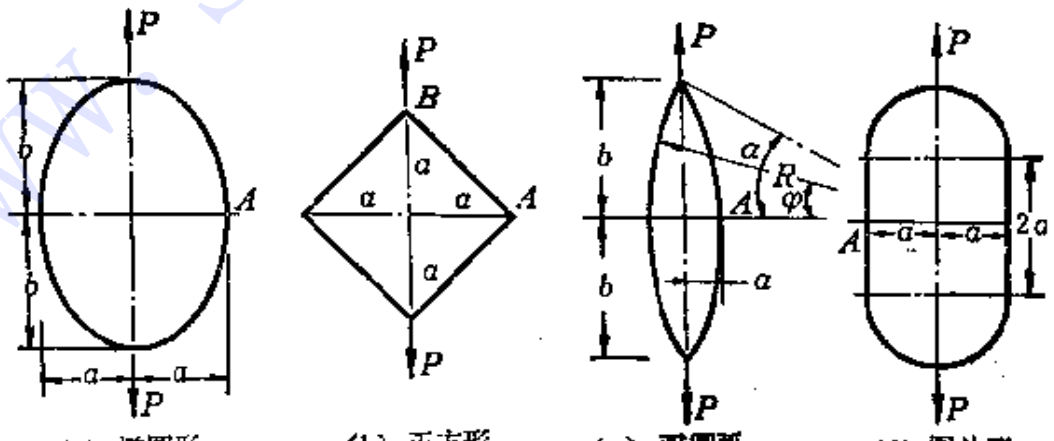
题 9.20 图



题 9.21 图

9.21　对图示带有中间铰的等腰三角形的等刚度刚架，能否不求解方程而直接画出它的弯矩图？

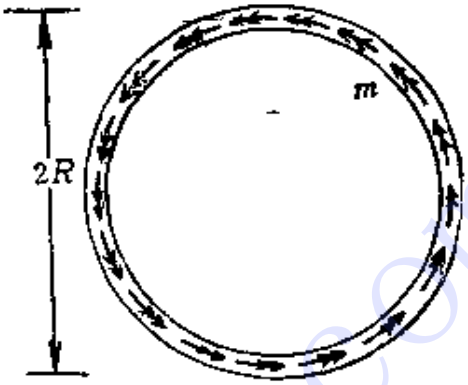
*9.22　试建立一种统一的方法来分析图中各种等刚度测力环，找出拉力P与测力环水平位移Δa之间的关系。



题 9.22 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

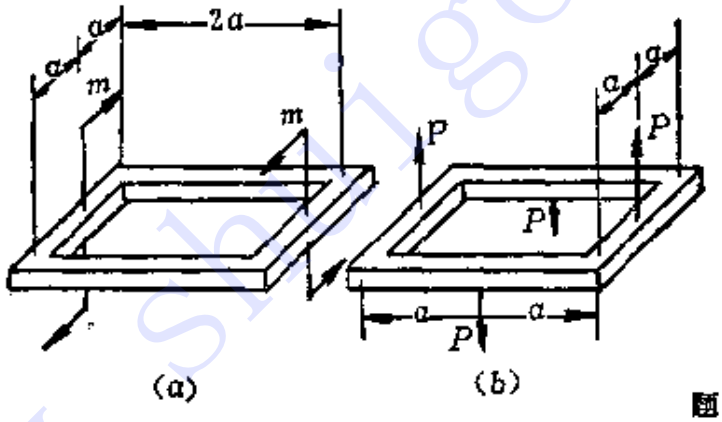
9.23　圆环上作用着围绕环的轴线转动的均匀分布力偶 m 如图，若要求出环直径上两横截面的相对转角，这个问题可否化为静定问题求解？



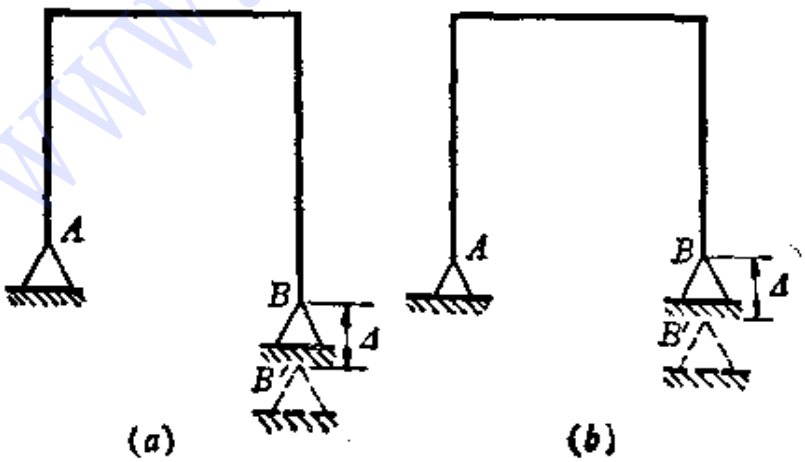
题 9.23 图

9.24　两等截面方框受力如图所示，试分析它们的超静定次数，并选取适当的基本体系、给出对应的多余约束力。

9.25　一般来说，当超静定结构的支座发生位移时，便会产生附加内力，如图 a 的刚架就是如此。但图 b 刚架两支座在同一水平线上，当支座 B 下沉一微量 Δ 时，并不引起内力。这是什么原因？



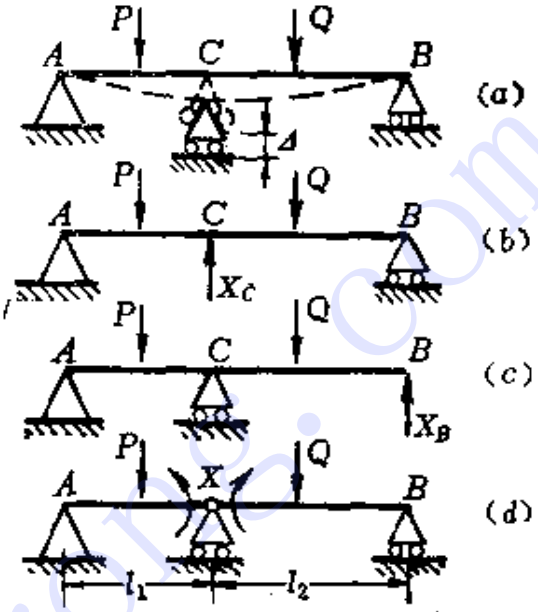
题 9.24 图



题 9.25 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

9.26 图a所示超静定梁的中间支座沉陷了Δ，求附加内力时怎样选取基本体系？若取图b、c和d所示的基本体系，它们的力法正则方程是否完全一致？



题 9.26 图

*9.27 考虑温度变化和支座沉陷的影响时，力法正则方程式的形式如何？各系数如何求出？

9.28 用单位载荷法求解超静定体系（以梁为例）的位移

$$\Delta=\int_l \frac{MM^0\mathrm{d}x}{EI}$$

以下四种办法中哪些是正确的？哪种最简便？

（1）M和M^0均从基本体系直接求出；

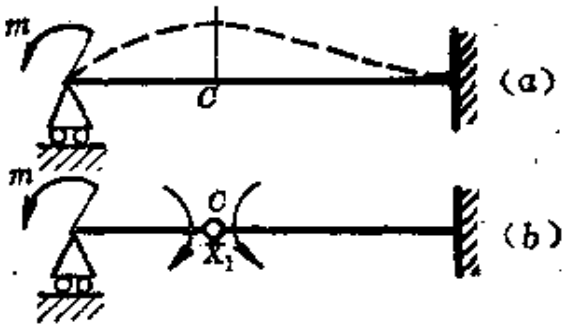
（2）M和M^0均从求解超静定体系得出；

（3）M从超静定体系求出，M^0从基本体系求出；

（4）M^0从超静定体系求出，M从基本体系求出。

四种办法的结果是否相同？为什么？

9.29 利用上题的办法（3）求解超静定体系的位移时，更换一个与原来求多余约束力时不同的基本体系来计算M^0，会不会引起错误？



题 9.30 图

9.30 怎样理解力法正则方程所代表的变形协调关系？对图a所示超静定梁，把截面C处的弯矩取为多余约束力X_1，画出

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

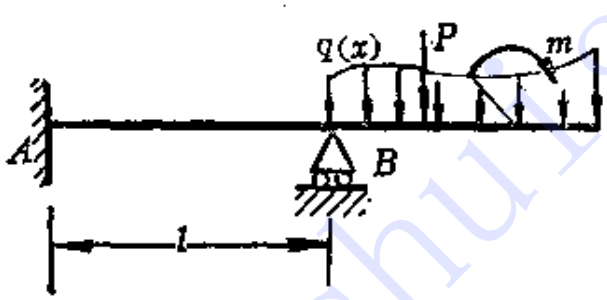
基本体系如图b，其正则方程为$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$。我们可以大概分析出此梁的挠曲线形状，如图$a$中虚线所示，这表明$C$处的挠度和转角都不等于零，问上列正则方程表示什么位移等于零？

9.31 当连续梁处于下列三种情况：（1）端部支座为固支；（2）中间支座处有集中力偶作用；（3）中间支座处有集中力作用；如何应用三弯矩方程？

*9.32 三弯矩方程中的第i个方程，为什么只涉及到三个未知数M_{i-1}、M_i和M_{i+1}？如果连续梁的各支座都是弹性支座，第i号支座的沉陷量为$f_i=R_i/k_i$，其中k_i为支座的弹簧刚度系数，R_i为支反力。问此时求解连续梁的基本方程中会出现几个弯矩？

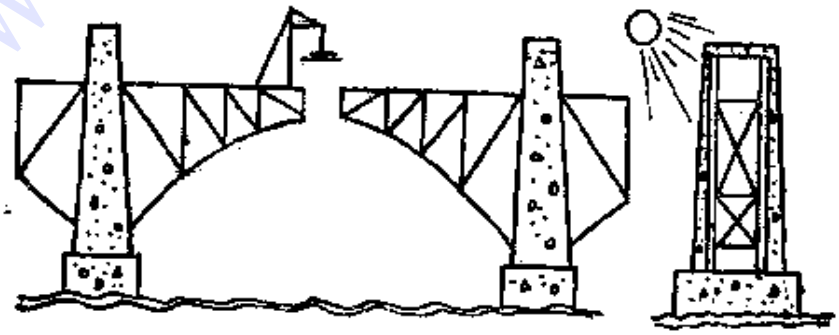
*9.33 连续梁某跨上有中间铰时，还能不能套用三弯矩方程？

9.34 如果等刚度超静定梁在某跨无外载，沿该跨弯矩将按什么规律变化？在图示等刚度梁上外伸部分的载荷无论怎么复杂，支座B处梁截面上的弯矩可以仅用平衡方程求出。此时支座A处梁截面上的弯矩M_A是否也可以仅用平衡方程求出？比值M_A/M_B是否为常数（与载荷和跨度l有无关系）？



题 9.34 图

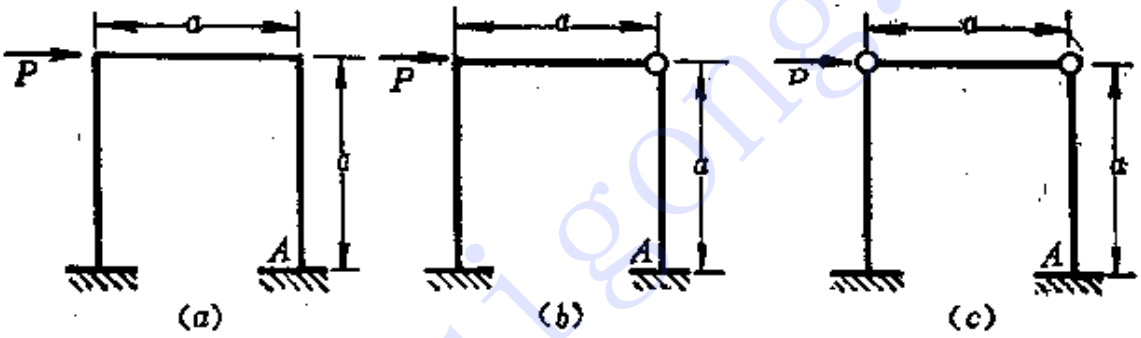
*9.35 悬臂桥在中点对接如图，强烈的阳光晒着桁架的一


题 9.35 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

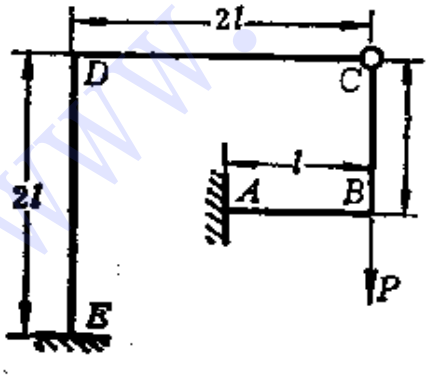
侧，另一侧因路面遮住而背阴。为使两半跨桥身对齐（即相对转角等于零），问接触处会产生什么相互约束力（假定纵向允许自由伸缩）？为了计算所产生的约束力，可采用怎样简化的力学模型？

9.36 图示各结构由材料和截面形状、尺寸均相同的杆件制成，试比较它们的最大弯矩的大小。工程实际中的杆系结构，在难于分辨节点的联接属于刚固还是铰接时，若分别按这两种联接模式进行强度核算，问哪种模式较偏于安全？从结构设计的角度看，削弱节点刚度会引起什么后果？

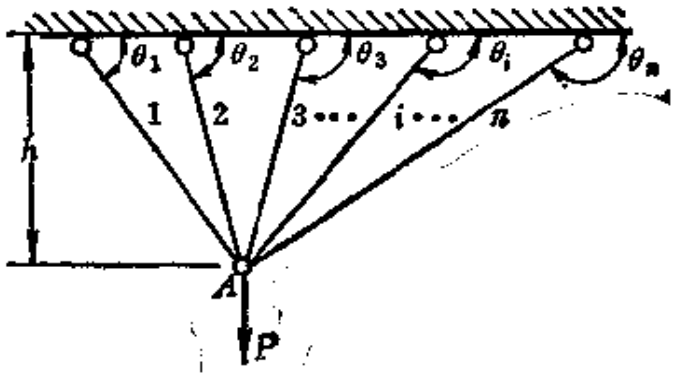


题 9.36 图

9.37 两等刚度刚架EDC和ABC在C处铰接，受力如图，问BC杆受拉还是受压？



题 9.37 图



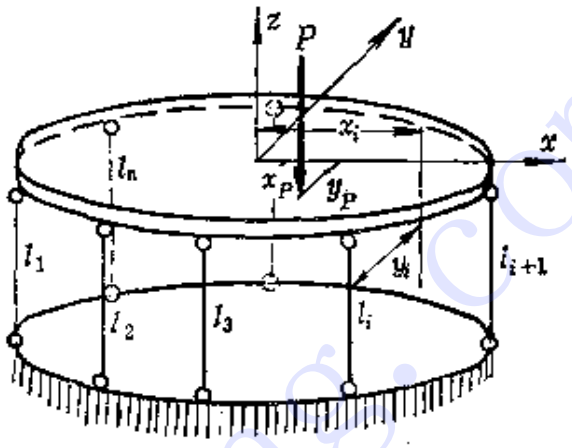
题 9.38 图

*9.38 n根杆件构成的超静定桁架受力如图，如何能比较简便

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

求出各杆的内力？　　提示：采用节点A处的水平位移δ_{Ax}和铅垂位移δ_{Ay}作为基本未知量，即采用位移法求解。

*9.39　刚性平板由n根彼此平行的弹性杆所支撑，构成图示的超静定系统。若刚体受力发生垂直位移w和绕x、y轴的转动θ_x、θ_y，问各杆中的内力如何计算？如果把各杆看作平行于z轴的纵向纤维，把刚性平板看作讨论平面假设时的横截面，我们由此可以得到什么启发？



题　9.39　图

*9.40　何谓最小弹性变形能原理（最小应变能原理）？怎样利用这个原理求解超静定问题？

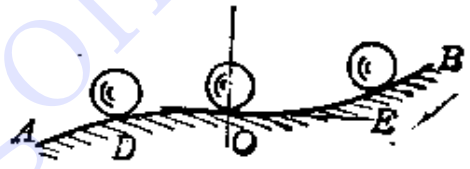
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第十章　压杆稳定和梁柱（纵横弯曲）

10.1　由于丧失稳定性与由于强度或刚度不足而使构件不能正常工作，有什么本质的区别？试举例说明。

10.2　压杆失稳后产生弯曲变形，梁受横力作用也产生弯曲变形，两者在性质上有什么区别？又有什么相同之处？

10.3　滚珠在表面AOB上无摩擦地运动，如图所示。它在O点处的平衡是稳定的吗？



题　10.3　图

*10.4　试查阅有关稳定问题的书籍，研究一下对于“丧失平衡稳定性”这个概念，有哪些定义和描述途径。

10.5　除了细长受压直杆的弹性失稳形式之外，你能列举出哪些单薄承压构件丧失稳定的例子吗？在这些失稳中构件的变形形式发生了什么变化？或者指出这些失稳的特征。

*10.6　受轴向拉伸的直杆会不会丧失平衡稳定性？为什么？

10.7　对于压杆的临界状态有这样两种描述：（1）临界力是使理想压杆维持直线平衡形式的最大载荷；（2）临界力是使压杆产生分支平衡形式的最小载荷。这两种描述有什么区别和联系？

10.8　试说明有哪些内在原因会引起细长压杆的弹性失稳。

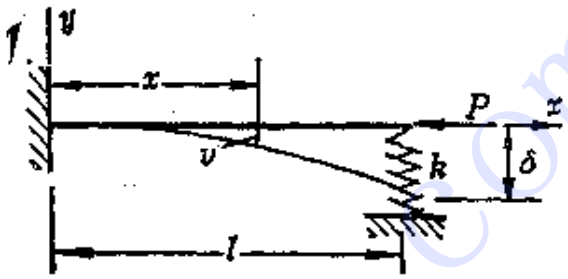
10.9　一根压杆的临界力与作用力（载荷）的大小有关吗？为什么？

10.10　从物理含义和材料力学中关于弯矩、挠度的符号规

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

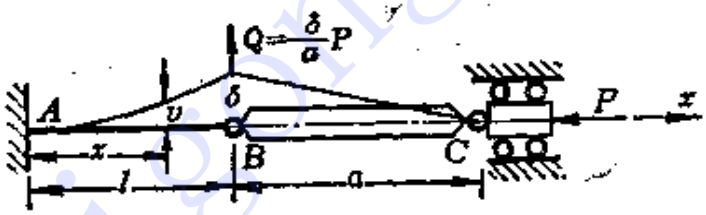
则两个方面来说明，不论如何选取坐标系，也不论如何假定失稳模态的凹凸，所得求欧拉临界力的微分方程 $EIv''+Pv=0$ 中，两项永远同为正号。

10.11 一端固定、另一端弹性支承的受压杆件如图所示。k 为弹簧刚度系数。试列出它的挠曲线近似微分方程和有关的边界条件。



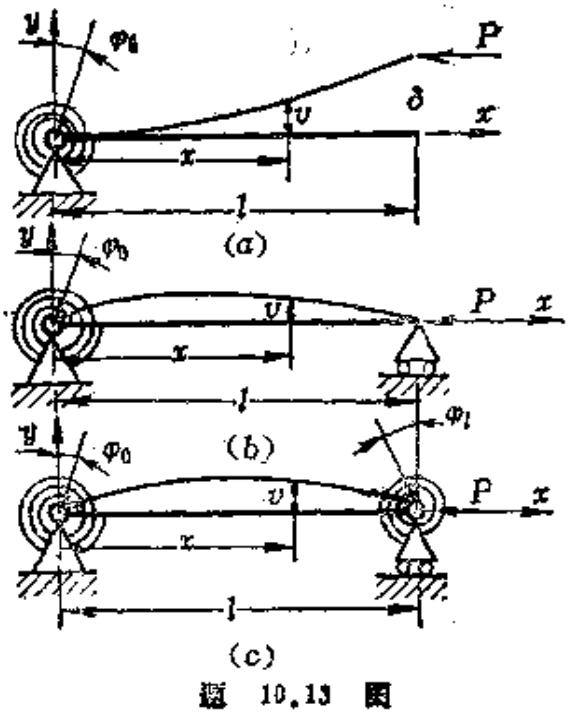
题 10.11 图

*10.12 压杆 AB 一端固定，另一端铰接刚性连杆 BC，如图所示。试列出其纵弯曲的挠曲线近似微分方程和有关的边界条件（图中 Q 是变形后由 P 引起的）。



题 10.12 图

*10.13 写出图示三种具有弹性转动约束的梁纵弯曲的弯矩和挠曲线近似微分方程的边界条件。图中弹簧铰的转角 $\varphi=\overline{\varphi M}$，$\frac{1}{\varphi}$ 为弹簧的刚度系数。δ 表示最大挠度。



题 10.13 图

10.14 相当长度 μl（或折算长度）与什么长度相当？你能记住各种杆端约束情况下细长压杆的长度系数 μ 值吗？μ 值愈大，表示压杆的稳定性愈大还是愈小？实际压杆的两端既非绝对固

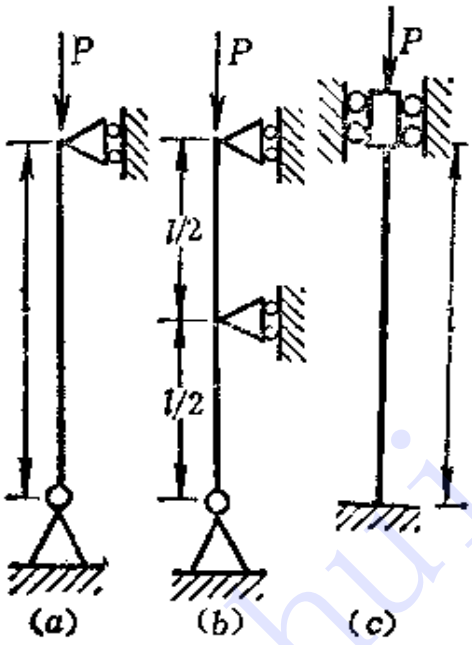
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

定、也非理想铰支，应当怎样来估计其μ值呢？

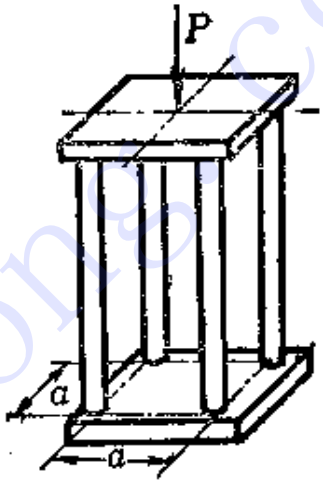
10.15　图示三根细长压杆，除约束情况不同外其他条件完全相同。试问哪一根杆最易失稳？哪一根杆最难失稳？

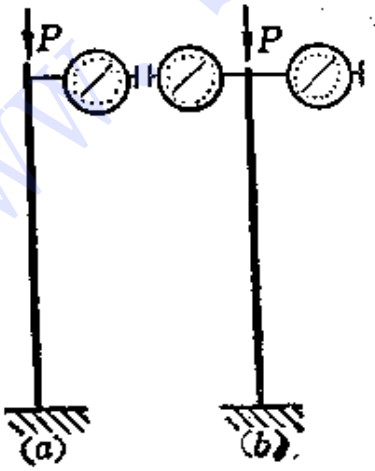
10.16　四立柱机架如图a所示，每根柱子承担$P/4$的压力。若各柱的材料和直径相同，是否会发生图b、c和d所示的失稳模态？哪一种失稳模态最容易发生？

10.17　测量细长杆临界力的实验装置如图，当两个试件完

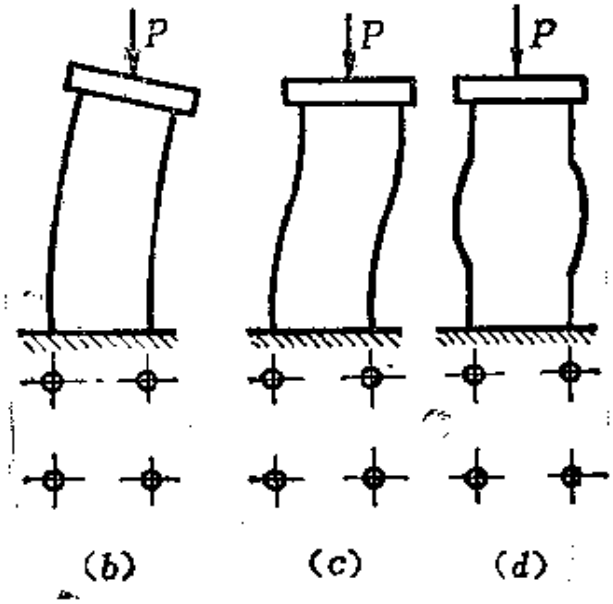


题　10.15　图





题　10.17　图



题　10.16　图

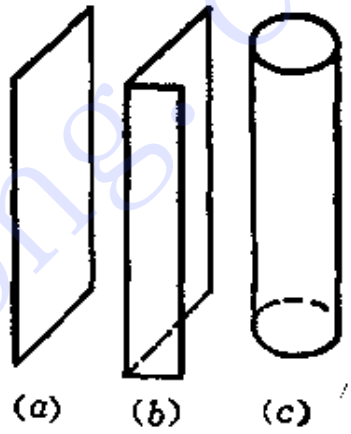
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

全相同时，两种装置的实验结果有无差别？各有什么优缺点？

10.18 对于一端固定、另一端自由的压杆稳定实验，采用电阻应变仪来测量应变，以便通过 $P-\varepsilon$ 曲线测定临界力。这时应变片贴在哪里为好？有几种贴法？哪一种较好？

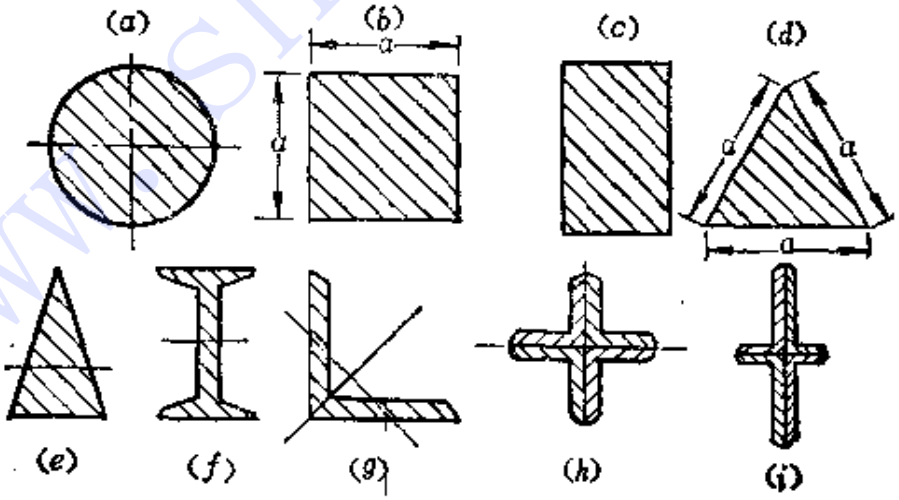
10.19 选择压杆的合理截面形状，有怎样的原则？为什么梁通常采用 $h/b=2\sim3$ 的矩形截面，而柱（压杆）则往往采用 $h/b=1$ 的正方形截面？

10.20 把一张纸竖立在桌上，如图 a，其自重就足以使它弯曲。若把纸折成角形放置，如图 b，则其自重就不能使它弯曲了。若把纸卷成圆筒后竖放，如图 c，甚至在顶端加上小砝码也不会弯曲。这是什么原因？



题 10.20 图

10.21 设图示各种截面形状的中心受压直杆两端为球铰支承，试判断它们丧失稳定时会在哪一个或哪一些方向上屈曲。如果压杆一端固定、一端自由，情况又会怎样？



题 10.21 图

10.22 工字形截面压杆的两端为圆柱形铰座时，为了得到最

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

大的稳定性，将杆件的腹板垂直于圆柱铰的轴线放置，是否合适？为什么？有什么机械设计上的应用实例？

*10.23 压杆的临界应力愈大，它的稳定性就愈好；临界应力愈小，稳定性就愈差。这种说法对吗？试研究下列三种情况，从中得出应有的结论。（1）两空心圆杆除了内径不同($d_1<d_2$)外，其他条件（包括外径）完全相同；（2）比较同一压杆在不同平面内失稳的可能性时；（3）对材料、截面形状和尺寸相同的几根压杆，比较何者容易失稳时。

10.24 试证明：几何上相似的中心受压杆件（全部线尺寸成比例），若端部约束情况和杆件材料相同，则临界应力相等，并且可用式$\sigma_{cr}=c\sqrt{P_{cr}}/l$表示。式中$P_{cr}$为欧拉临界力，$l$为杆长，$c$为常数。系数$c$是否与杆件的材料、端部约束和截面形状有关？若临界应力超过了比例限，上式是否仍然适用？

10.25 由公式$\sigma_{cr}=\pi^2E/\lambda^2$可以看出，细长压杆采用高级钢材与普通钢材的临界应力大致相同；但从$[\sigma_{st}]=\varphi[\sigma]$来看，则似乎压缩许用应力$[\sigma]$高的材料稳定许用应力$[\sigma_{st}]$也高。这两者是否相互矛盾？应当如何解释？

10.26 有的文献认为，目前由于广泛采用高强度钢和超高强度钢，使得稳定性问题更为突出了。这是为什么？

10.27 两端铰支的圆截面压杆，其直径$d=50\text{mm}$，长度$l=1\text{ m}$，材料为A3钢，求临界压力。有人随即求得

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2(200\times10^9)(\pi\times0.05^4)}{(1\times1)^2\times64}=606\text{kN}$$

试问这个结果对不对？为什么？

10.28 两端铰支的圆截面压杆，其直径$d=50\text{mm}$，长度$l=2\text{m}$，材料为A3钢，其直线公式为$\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$（MPa），求临界压力。有人随即利用上式求得

$$P_{cr}=A\sigma_{cr}=\frac{\pi\times0.05^2}{4}\left(304-1.12\frac{1\times2}{0.05/4}\right)\times10^6$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$=245\text{kN}$

试问这个结果对不对？为什么？

10.29 通常用柔度λ来判断压杆属于细长杆、中长杆还是短杆。还有其他办法来判断吗？如何判断？

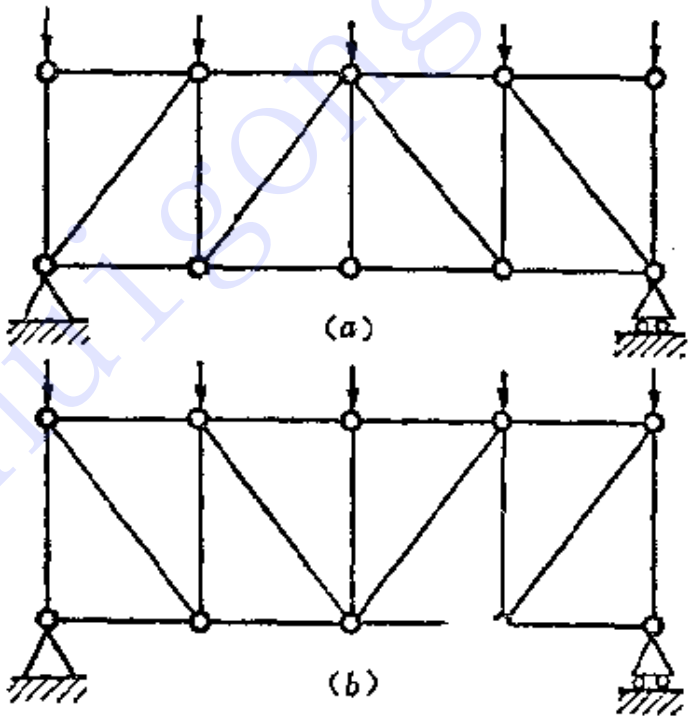
10.30 计算中长杆的临界应力时，如果误用了细长杆的欧拉公式，后果如何？计算细长杆的临界应力时，如果误用了中长杆的经验公式，后果又如何？

10.31 中长杆的直线公式$\sigma_{cr}=a-b\lambda$中，a和b是怎样确定的？它的单位是什么？

10.32 用$\sigma\leqslant[\sigma_{st}]=\varphi[\sigma]$的条件核算压杆，与简单拉、压时的强度条件有什么区别？

10.33 设计压杆的截面尺寸时，为什么一般要进行试算？举例说明试算法的步骤。①

10.34 图示两个钢制桁架除了斜杆的布置不同外，其他条件完全相同，问何者较为合理？为什么？



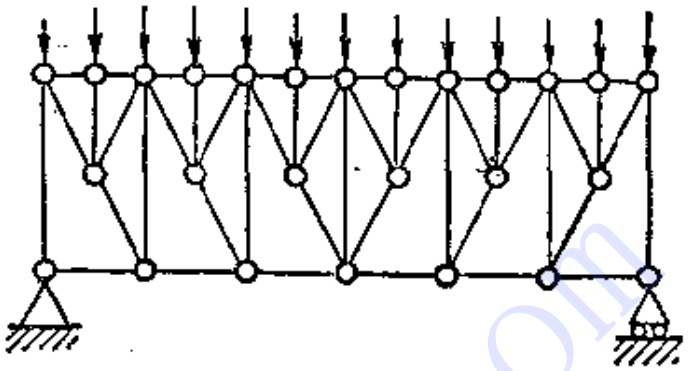
题 10.34 图

10.35 桁架式钢桥如图所示，设计时在上半部加了许多

① 在某些情况和条件下，也可不用试算，详见《力学与实践》1981年第4期吴荣礼《几种常用截面压杆设计的一种简便方法》一文（或文献[21]339—341页），《华侨大学学报》1984年第1期陈云惠《型钢截面压杆设计的简化》一文，《力学与实践》1985年第6期高宝珍《压杆截面设计的图解法》一文以及《力学与实践》后来一些有关文章。

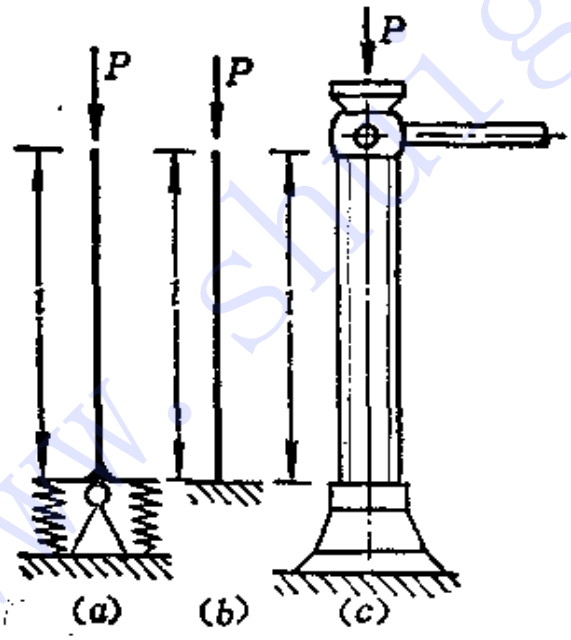
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

竖杆和斜杆，这是出于美观还是出于材料力学上的考虑？

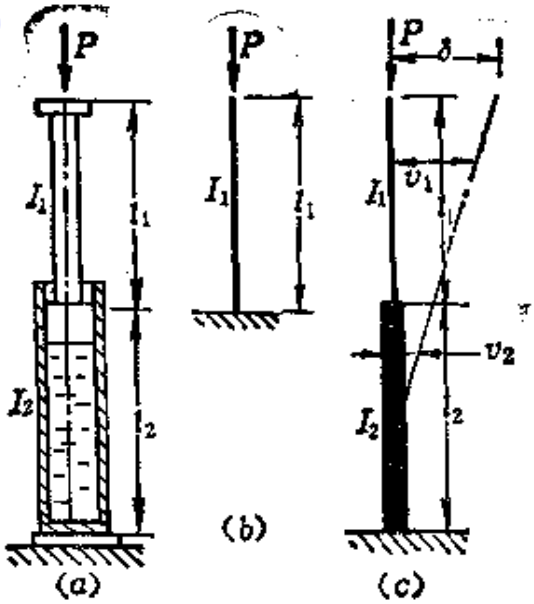


题 10.35 图

*10.36 图 a 和 b 两细长圆杆除了支承不同外，其他条件完全相同。图 a 表示杆件固定在刚性底座上，而底座又置于弹性地基上；图 b 则表示杆件直接固定在刚性地基上。问两者的临界压力是否相同？对于图 c 所示螺旋千斤顶，其底座对起顶丝杆的稳定性有没有影响？在校核稳定性时，若把起顶丝杆看成是一端固定、另一端自由的压杆，并取长度为 l，试问这个计算模型是偏于安全还是偏于危险？



题 10.36 图

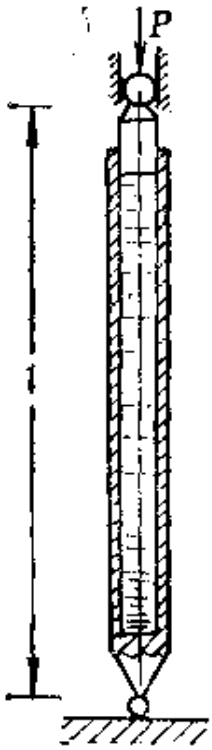


题 10.37 图

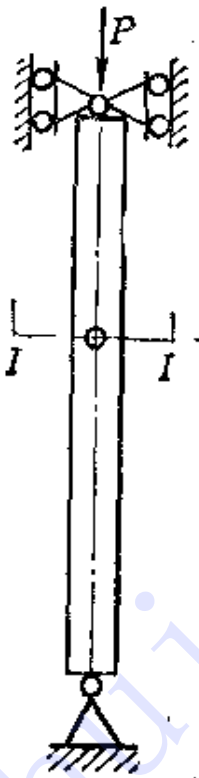
10.37 在求图 a 所示油压作动筒的临界力时，是采用图 b 还是图 c 的计算模型比较合理？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

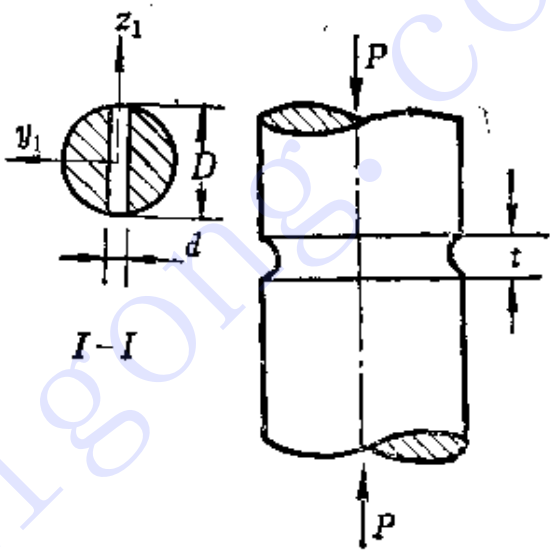
*10.38 图示一直圆筒，下端用铰固定，内部充满液体，上端用柱塞盖紧后，通过滑铰加压。设塞与筒之间没有摩擦力，力 P 的作用通过液体传到筒壁上，但筒并不承受纵向压力。如果筒属于细长杆，它会不会丧失稳定性？



题 10.38 图



题 10.39 图



题 10.40 图

10.39 当压杆只有局部的截面削弱时（可用图示钻有圆孔的杆为例），为什么在强度条件中要用净面积计算，而在稳定性条件中要按毛面积计算？计算图示细长杆的临界力时，取 $I=(\pi D^4/64)-(dD^3/12)$ 对不对？

*10.40 图示细长杆上有一刻槽，用 $\sigma\leqslant[\sigma_{cr}]$ 进行稳定性校核，式中 σ 为横截面上的应力，$[\sigma_{cr}]$ 为稳定的许用应力。人们对 σ 有不同的取法：（1）取有槽截面的平均应力；（2）取无槽截面的应力；（3）取有槽截面的最大应力。问哪一种选取方法是对的？在 $[\sigma_{cr}]=P_{cr}/An$ 中，如何考虑刻槽等局部削弱对欧拉

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

临界力P_{cr}的影响？

*10.41 若悬臂压杆在自由端上作用的纵向外力始终保持垂直于自由端的横截面，应怎样列出自由端的边界条件？此时压杆会不会丧失稳定性？其临界压力如何？

10.42 1934年，苏联在改建第聂伯罗彼得罗夫斯克城电车线路时，枕木和钢轨都露在道碴外面。钢轨长50m，其中间接合处是焊接的。白天气候炎热，比铺设时高出30℃，结果钢轨弯成了蛇形（将枕木也带动了），在一个学院附近半波的长度约为5m，挠度达30cm。试分析钢轨变弯的原因。

10.43 试分析在24小时内由于温度变化而在连续铁路轨道上可能引起的应力变化。为使钢轨不致发生侧向弯曲，应作用有什么样的力？这些力宜作用在哪里？它们与钢轨的长度有什么关系？

10.44 试说明用能量法求压杆临界力的原理。采用能量法有什么优点？应该怎样假定近似的挠曲线？为什么用能量法求出的临界力近似值总是大于（或等于）精确值？

10.45 用能量法求解两端铰支或悬臂的压杆的临界力时，可以选用怎样的近似挠曲线方程？

10.46 实际的压杆多少总有些初曲率，加载也难免有些偏心。在这些具体情况下，理想压杆的欧拉临界力还有什么实际意义？

*10.47 如何计算上题所述非理想压杆的临界载荷？

10.48 为什么说梁柱① 是非线性体系？材料力学中一般所研究的梁柱是否处于弹性范围之内？材料是服从胡克定律的，为什么梁柱会成为非线性体系呢？

*10.49 对梁柱作强度核算时，我们以怎样的情况作为危险

① 同时受到纵向力和横向力系作用的直杆，称为梁柱。这种加载形式通常称为纵横弯曲。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

情况？建立梁柱的强度条件时，为什么要以产生这种危险情况的载荷为依据，而不能直接以梁柱的最大正应力小于材料的许用应力来考虑？梁柱的强度条件$\sigma_{max}(nP, nq) \leqslant \sigma^0$的左边算式中包含有安全系数$n$（式中$P$为纵力，$q$为横力，$\sigma^0$为材料的危险应力），与梁的强度条件显得不同，你是怎样理解这个特点的？

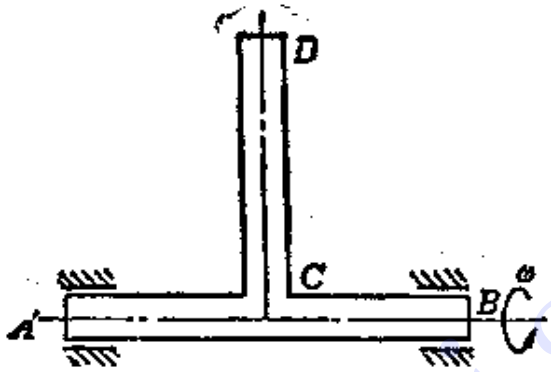
10.50 梁柱的欧拉力与压杆的临界力有什么相似性？它们在物理意义上又有什么不同？

*10.57 薄壁圆管扭转时会丧失稳定性，因此，设计时要注意不能把管的壁厚取得太薄。例如，对于管的平均半径与壁厚之比为60的低碳钢长圆管，当最大应力达到通常的许用应力值时将会发生失稳。问这里说的最大应力和许用应力指的是正应力还是剪应力？为什么？

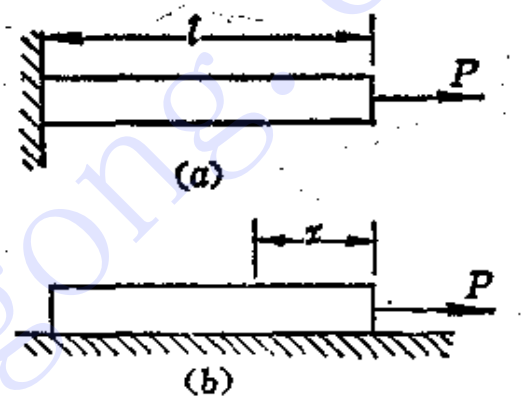
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第十一章　动载和疲劳

11.1　等速旋转的轴AB在中部与CD杆刚性连接，如图所示，在研究什么问题时，可以把CD杆的惯性力集中作用在它的质心上？在什么情况下又必须把CD杆的惯性力作为分布力系处理？



题 11.1 图



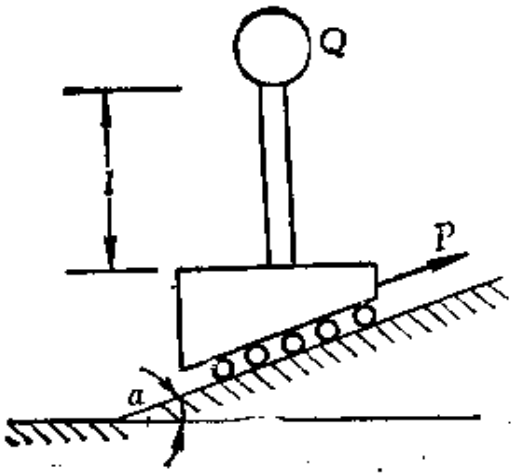
题 11.2 图

11.2　图中两杆的材料和尺寸相同。（a）杆受静力P作用，不计杆的自重；（b）杆置于光滑平面上，在力P作用下以等加速度运动。两杆的内力大小属于下列哪种情况：（1）$N_a(x)=N_b(x)$；（2）$N_a(x)<N_b(x)$；（3）$N_a(x)>N_b(x)$。

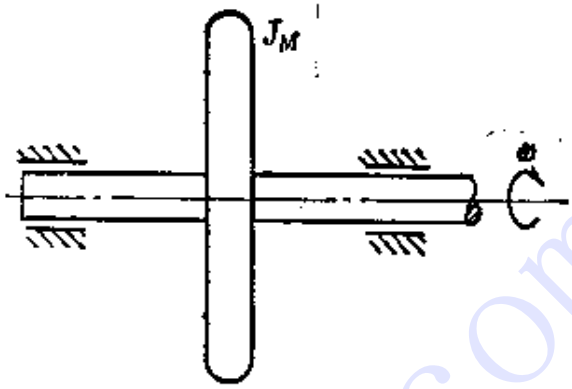
11.3　图示悬臂杆顶端联接重物Q，底端固定于缆车上，当缆车受力P作用以等加速度爬坡时，此杆始终垂直于地平面。若考虑重物和杆的质量时，试绘图表示杆所受各种外力的作用位置、方向和大小。设杆的单位长度重量为q，试写出它的最大轴力和弯矩。

11.4　图示旋转轴上装有一个转动惯量为J_M的盘体，试按下列各种情况分析轴所受的外力和产生的变形：（1）盘体质心位于旋转轴的轴线上，没有偏心，轴以等角速度ω旋转；（2）

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



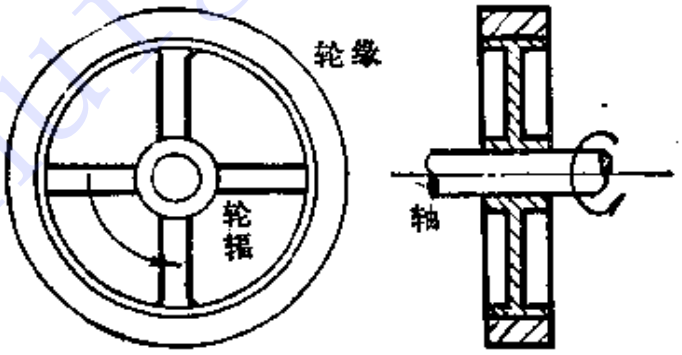
题 11.3 图



题 11.4 图

盘体质心有偏心距 e，轴以等角速度 ω 旋转；（3）盘体质心没有偏心，某一瞬间轴的角速度为 ω、角加速度为 ε；（4）盘体质心有偏心距 e，某一瞬间轴的角速度为 ω、角加速度为 ε。

11.5 如图所示，一轴上装有飞轮，当以等角速度 ω 转动时，轴、飞轮轮缘和轮辐上各受到什么力作用？如果轴以变角速度转动，在保持角加速度为常数 ε 时，上述各部分又受到什么力作用？

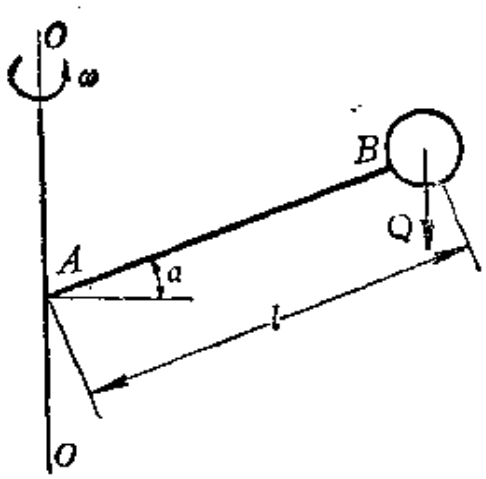


题 11.5 图

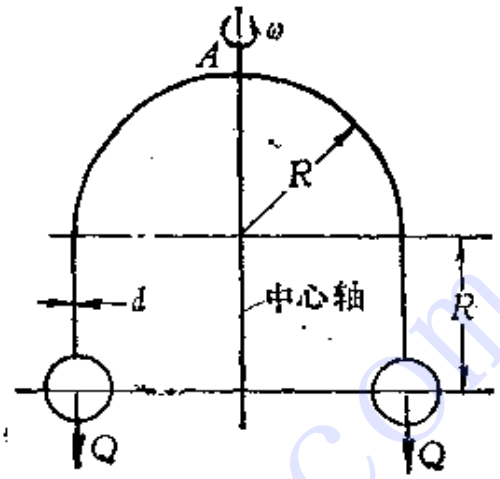
*11.6 灰铸铁制造的圆环形飞轮（图同上题），作等速旋转时轮缘出现了破裂现象。若采用加大轮缘横截面积的办法，能否防止破裂现象再度发生？这种办法是否增加了轮缘的刚性，从而防止了高速转动下过盈配合的轮缘出现松脱现象？

*11.7 图示斜杆 AB 的单位长度重量为 q，B 端固定一重物 Q。当此杆绕铅直轴线 OO 以等角速度旋转时，试画出它的受力

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 11.7 图

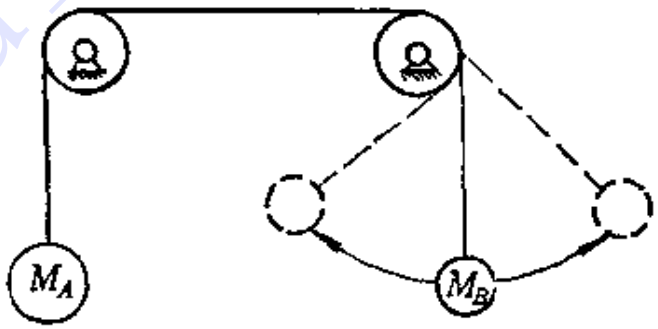


题 11.8 图

图，并计算其最大内力。

11.8 儿童乐园中骑马转圈游戏机可简化为图示的计算模型，并认为它以等角速度绕中心轴旋转。为保证安全，应如何加强此结构？

11.9 图示系统右边物体的质量为M_B，且$M_B<M_A$，当它在铅垂平面内摆动时，如何分析绳的张力？



题 11.9 图

11.10 用能量法计算冲击应力时，采用了哪些简化假设？这些假设对于简化计算起到了什么作用？

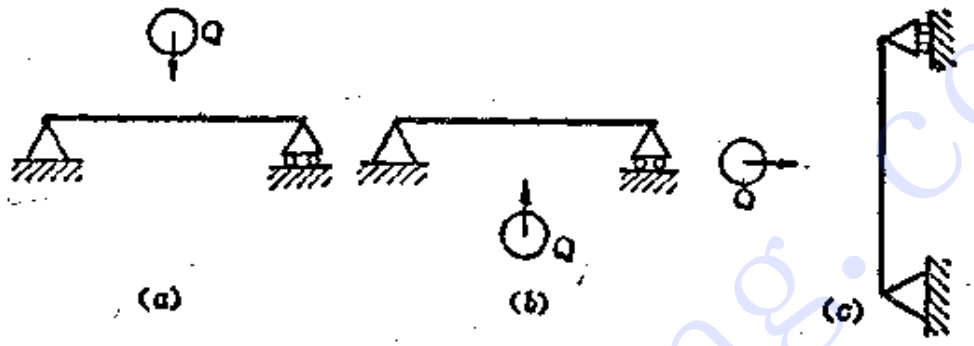
11.11 解决冲击问题时，认为冲击物体的机械能等于被冲击物体的弹性变形能，而略去了后者局部塑性变形所消耗的能量以及其他如声、热等能量转化。这样做使材料力学的估算结果偏于安全还是偏于危险？为什么？

11.12 考虑被冲击物体质量的影响，所算出的动载系数比

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

不考虑质量时为大还是小？为什么？

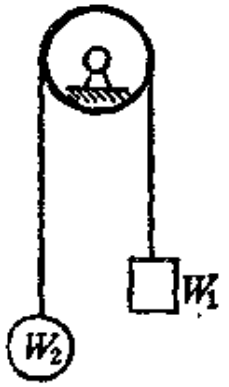
11.13 重物Q分别从上方、下方和水平方向冲击同样的简支梁的中点，如图所示，设重物与梁接触时的速度均为v，而且可以忽略梁的质量，这三种情况下梁的最大正应力是否相同？为什么？



题 11.13 图

11.14 为什么一根刚度大的杆件往往容易被冲击破坏？为什么缓冲弹簧可能承受很大的冲击载荷而不致破坏？

*11.15 滑轮与两重物W_1和W_2组成运动系统如图所示（$W_1>W_2$）。当系统运动时或当W_2被卡住而使运动突然停止时，其动载系数应当如何计算？



题 11.15 图

11.16 试写出并比较以下几种情况的动载系数公式：（1）自由落体冲击；（2）末速度为v的水平冲击；（3）吊索下端悬挂重物，在等速度v下放过程中突然停止；（4）突加载荷。

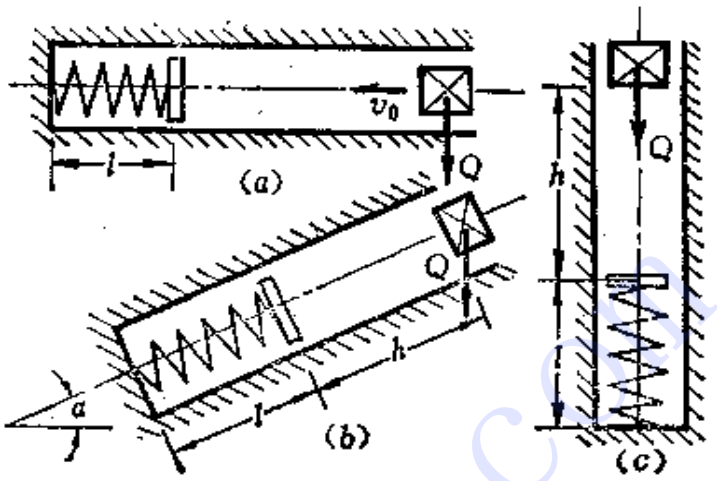
11.17 试举例说明采取什么措施可以有效地降低冲击应力。

11.18 试比较杆件的静应力与冲击应力的影响因素（可以利用近似公式$K_d=\sqrt{T_0/U_1}$）。

11.19 刚度系数为c的弹簧在三种不同位置上受到重量为Q

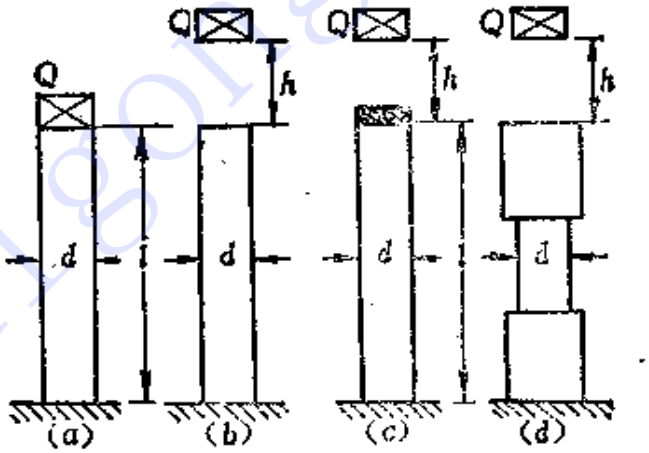
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

的物体冲击，如图所示。若不计重物与斜面的摩擦力，问三种情况下最大动位移有何区别？



题 11.19 图

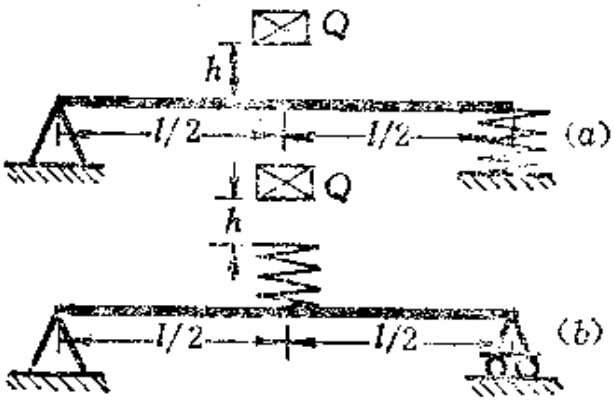
11.20 图 a 重物 Q 以静载方式作用，图 b 至 d 重物 Q 从高度 h 处自由落下，图 c 在杆的顶端放置了橡皮垫块。这四根材料相同的圆杆中哪根的正应力最大（不计应力集中效应）？哪根的正应力最小？



题 11.20 图

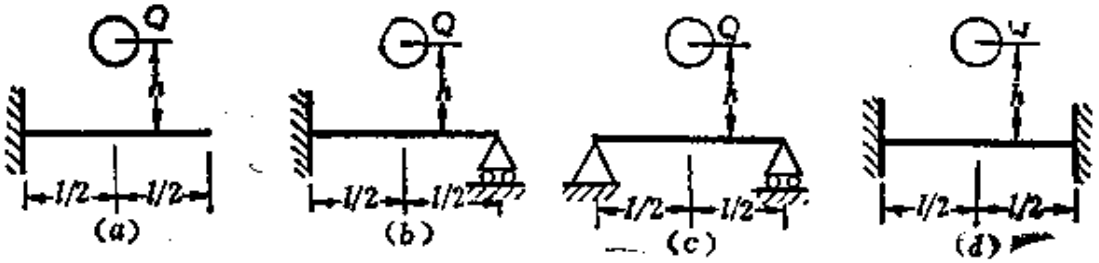
11.21 若把同样的缓冲弹簧放在同样的梁的不同位置上，如图所示。问哪种情况的缓冲效果较好？

11.22 同样的梁处于图示四种不同的约束条件之下，在中点受到同样的冲击载荷或静载前，试列出它们的最大动应力和最大静应力的大小顺序（可用 $K_d \approx \sqrt{2h/\Delta_1}$ 计算）。



题 11.21 图

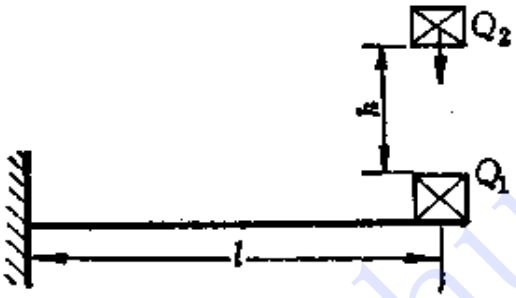
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



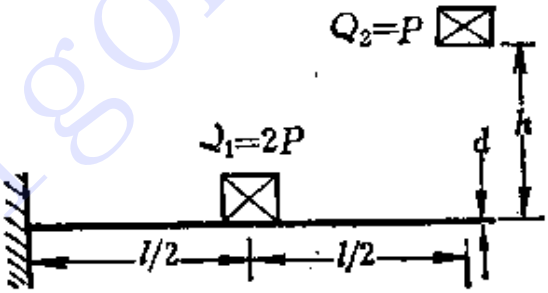
题 11.22 图

11.23 在上题的图 a 中，当冲击点分别在梁的自由端和中点时，哪种情况的动应力较大？

11.24 等直悬臂梁如图所示，在其自由端放置静载 Q_1 后受到自由落体 Q_2 的冲击作用，问动载系数将是怎样的（不计被冲击体系的质量）？若考虑被冲击体系的质量时，又将如何分析？



题 11.24 图



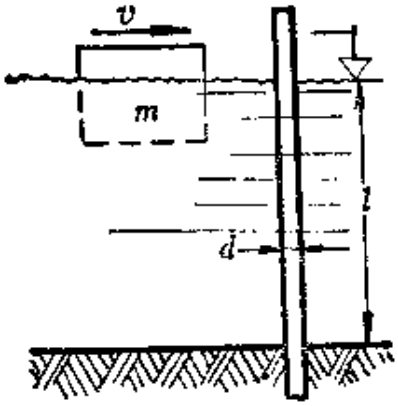
题 11.25 图

*11.25 圆截面悬臂梁如图所示，在其中点放置静载 $Q_1 = 2P$ 后受到自由落体 Q_2 的冲击作用，试判断危险面的位置。危险点上的应力应如何计算？不计梁的质量时动载系数 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_1}}$ 中的 Δ_1 怎样计算？结合上题试总结冲击与静力混合作用问题强度校核的方法。

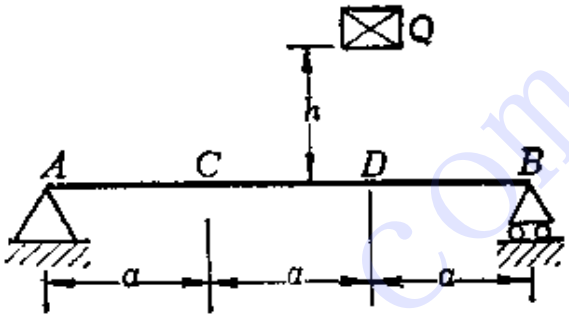
11.26 高寒地区春天江河解冻时，江上冰排甚为壮观。设质量为 m 的冰块以速度 v 冲击到江中的木桩上，如图所示。若不计河水对桩的压力和对冰块的阻力，问如何计算木桩的动应力？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

若水深和木桩长度均增加一倍，而其他条件不变，这时冲击应力是增大还是减小？



题 11.26 图



题 11.27 图

11.27 重物Q自由落下冲击在简支梁的D点处，如图所示。用f_d和f_j分别表示此梁的最大动、静挠度。试回答下列问题：

（1）梁的最大动挠度是否为$f_d=\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{f_j}}\right)f_j$？

（2）C截面的冲击应力是否为

$$\sigma_{dc}=\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{f_j}}\right)\sigma_{jc}?$$

11.28 建筑工人的安全帽和战士的钢盔内部都设置有软带，你知道这种软带有什么作用吗？怎样设计这类头盔才比较合理？试谈谈你的方案。

11.29 试根据拉压、弯曲和扭转等冲击应力的近似公式，说明杆件的冲击应力与其单位体积所吸收的能量有关。在什么情况下，“杆件体积大，冲击应力小”这个结论才适用？为什么？

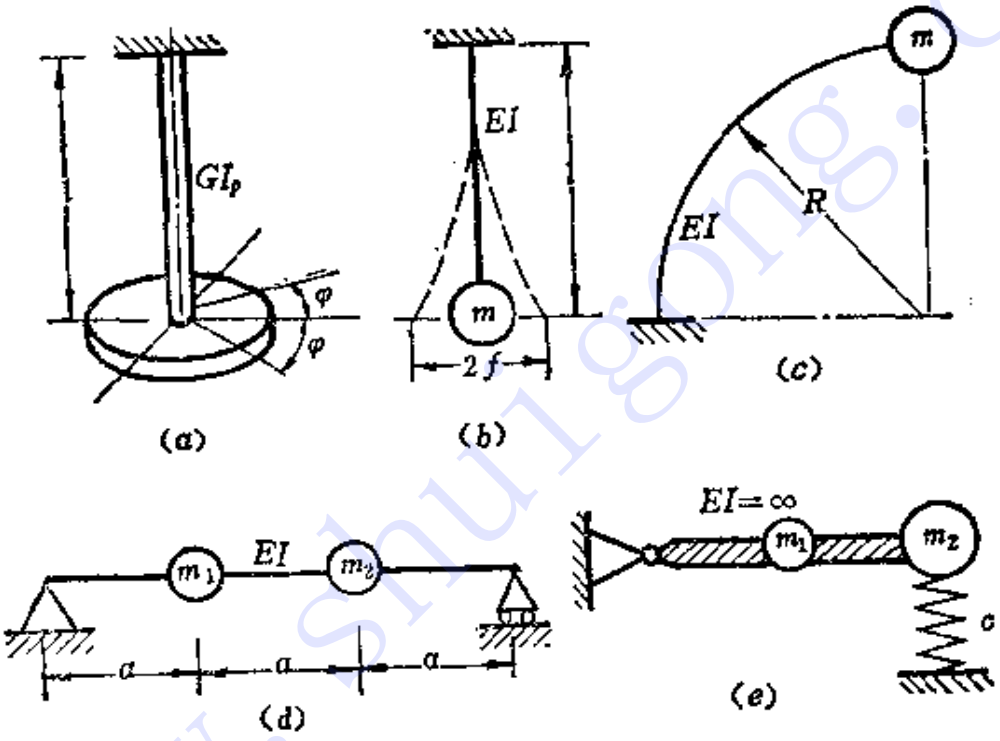
11.30 承受拉压冲击的杆件以等截面为佳；但是，在跨度中央承受冲击而弯曲的简支梁（例如叠板弹簧），为了减低冲击应力，却制成变截面的；承受扭转冲击的轴宜于采用空心圆截面。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

试问这些说法的道理何在？

11.31 试回答下列问题，并说明其共同的原因：（1）为什么铁路要用碎石子而不用整块条石作为路基？（2）一般扁担的截面为什么是扁的而不制成方形或圆形？（3）起重机的吊索，为什么采用多股钢丝绳而不采用钢条？

11.32 弹性振动系统的自由度是如何定义的？图示五种弹簧-质量系统，在小幅振动条件下，不计各杆件质量时，各是几个自由度系统？



题 11.32 图

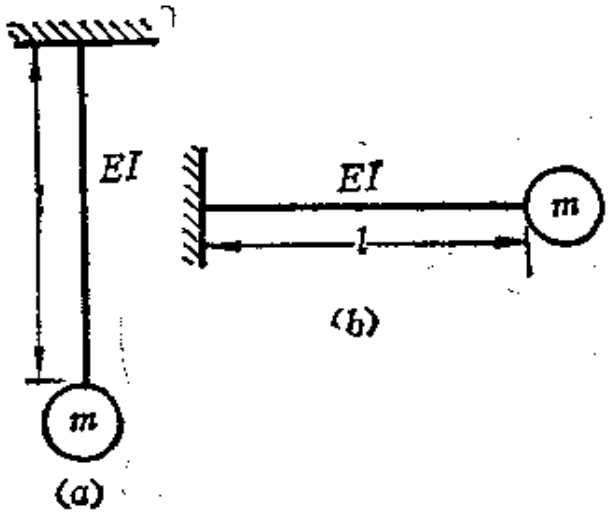
*11.33 音叉是几个自由度的振动系统？

11.34 当重物处于平衡点之上、下不同位置，其速度向上或者向下时，振动系统的运动微分方程中各项的正负号会不会因而改变？为什么？

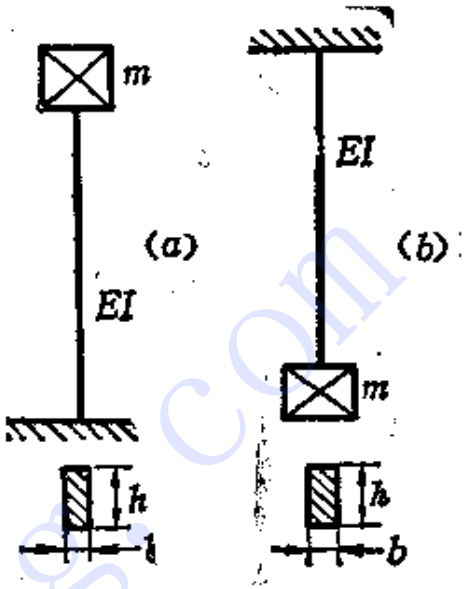
11.35 对图示弹簧-质量系统作横向弯曲振动的两种常见情况，如果不计梁的质量，它们的自由振动微分方程、固有频率和

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

最大动应力有什么区别？重力作用有什么不同的影响？



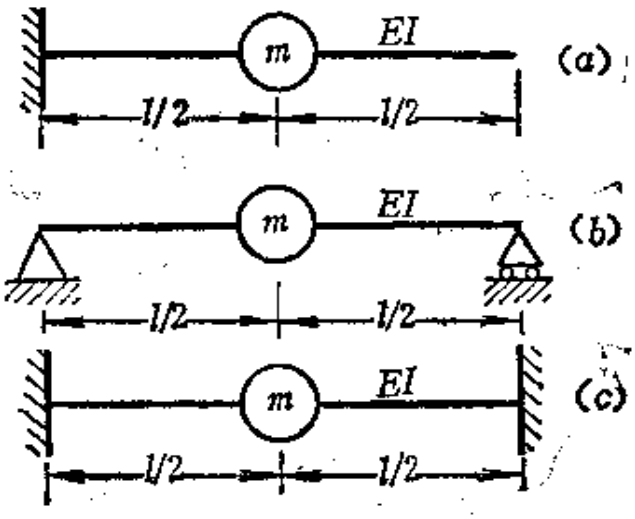
题 11.35 图



题 11.36 图

*11.36 图示两个由相同的杆和重物组成的弹性振动体系，在下列两种情况下：（1）不计纵向力 mg 的影响；（2）考虑纵向力 mg 的影响，两体系的固有频率是否相同？

11.37 图示三个系统的重物和无重梁相同而约束状态不同，试排列出它们固有频率的大小次序。由此可以得出什么结论？



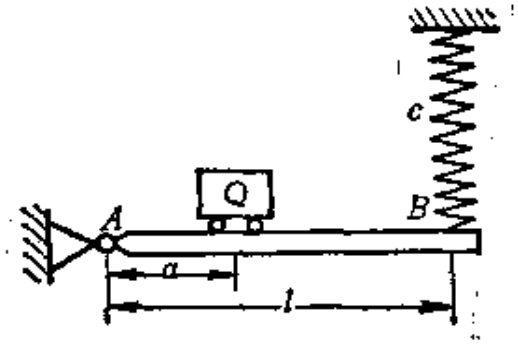
题 11.37 图

11.38 图中 AB 为刚性跳板，弹簧的刚度系数为 c。问滑车 Q 自左向右运动时，系统的固有频率如何变化？

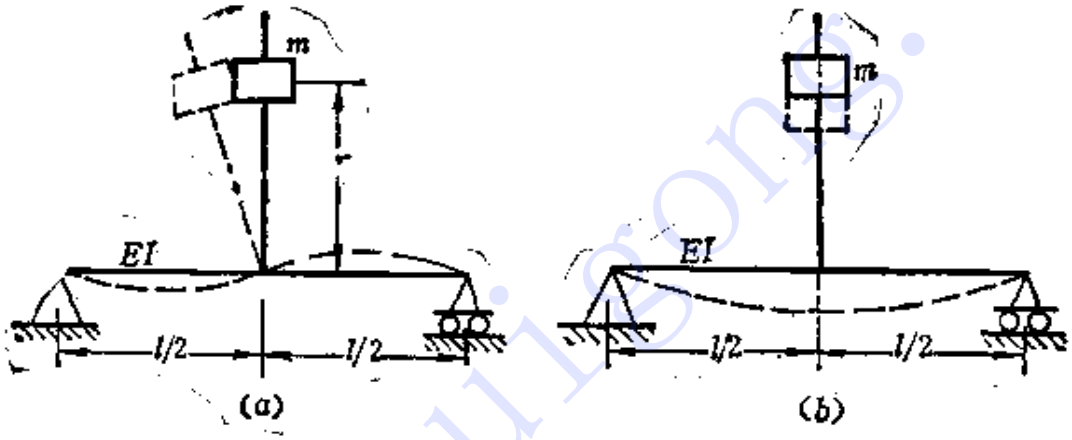
11.39 等截面刚架简支如图，竖杆上装有可移位重物（质量为 m），其两种基本振型如图 a 和 b 的虚线所示，试问哪种情况的固有频

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

率较低？能不能使两者的固有频率相等？

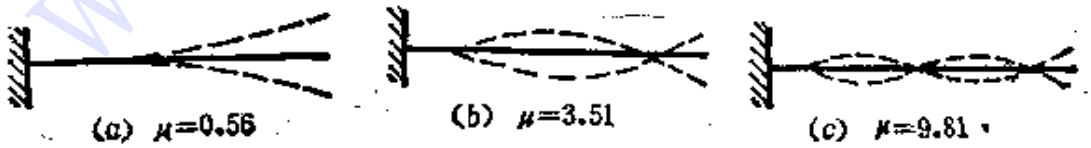


题 11.38 图



题 11.39 图

11.40 涡轮叶片或其他等截面悬臂杆的前三阶固有横向振动模态如图所示，对应的圆频率为 $\omega=\frac{\mu}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$，试定性地解释为什么高阶模态的频率比低阶的高？



题 11.40 图

*11.41 质量连续分布的等截面直梁产生弯曲振动时，梁的

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

微段 dx 内可能存在哪些惯性力？它们对横向振动的影响如何？

11.42 振动、冲击和疲劳这三个问题之间有什么联系？

11.43 受交变应力的实际构件，其应力 σ 对时间 t 的变化规律，是否象材料力学教科书上通常所绘的正弦曲线那样？在疲劳强度的核算中，以循环特征 r 为依据时，只考虑了 σ-t 变化规律的哪些方面？

11.44 试分析下列物体承受什么样的载荷。如果属于疲劳问题，试大致估计其循环特征：（1）液化气罐；（2）在挑东西时的扁担；（3）在走路时的鞋底中部；（4）自行车内胎（不考虑行驶时的作用）；（5）走路时在膝盖附近的裤腿；（6）汽车后轮的驱动轴；（7）轮转而轴不转的承重车轴。

11.45 试举出下列几种交变应力的工程实例：（1）应力是对称循环的；（2）应力属于非对称循环，$r>0$ 和 $r<0$ 的情况；（3）应力是脉动循环的；（4）交变应力的循环特征保持不变；（5）交变应力的平均应力保持不变；（6）交变应力的最小应力保持不变。

11.46 交变应力一定是由交变载荷产生的吗？试举例说明。

11.47 为什么要引入循环特征 r？试用 σ_{max}、σ_{min}、σ_a 和 σ_m 这四个特征应力中的任意两个表示 r。r 的取值范围如何？是不是 $|r|<1$？

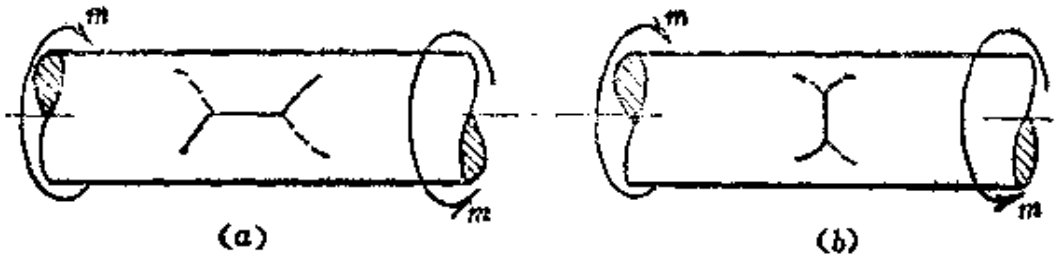
*11.48 若 σ_a 保持不变，当 σ_m 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时，r 的变化规律如何？试大致画出 $r=1$ 和 $r=-\infty$ 时 $\sigma(t)$ 的曲线。

11.49 当列车进站停车时，铁路工人往往用小锤子敲击车箱底下的弹簧等零件。这种频繁的检查有什么目的？

11.50 交变应力时材料发生破坏的原因是什么？与静载破坏有什么区别？能不能用应力状态来区分交变应力下材料的强度？

11.51 圆轴扭转的疲劳裂纹往往如图所示，试分析为什么会形成这样方向的裂纹。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 11.51 图

11.52 每一种材料是否只有一个持久极限（疲劳极限）？由此得到什么体会？

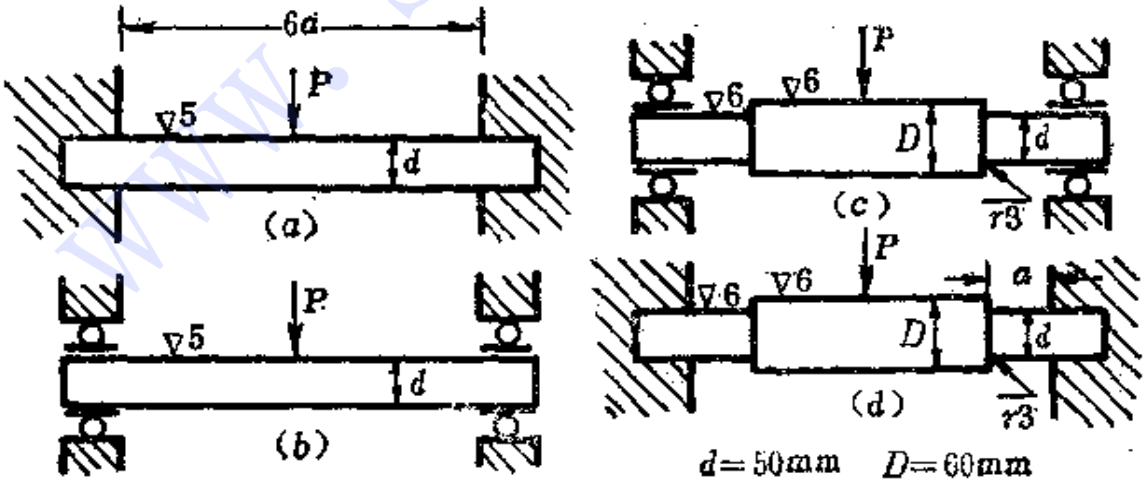
11.53 对于同一材料而言（变形形式也相同），在哪种应力循环下的持久极限最低？

11.54 应力集中对于高强度合金钢、低碳钢、高碳钢和球墨铸铁的持久极限，各有怎样的影响？

11.55 为什么用高强度合金钢制作承受交变应力的零件时，特别需要精细的表面加工，使用时还要严格维护、防止锈蚀？

*11.56 怎样理解非对称循环时几何形状等因素只对构件持久极限的极限应力幅 σ_a 产生影响，而对其平均应力 σ_m 基本上没有影响？

11.57 图示四根圆轴由45号钢制成，其中图 b 和 c 的轴转动，图 a 和 d 的轴固定不动。若它们在中央所受到的铅垂力大小



题 11.57 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

相同且方向均保持不变，试比较它们的弯曲强度。

11.58 为什么对于承受交变应力的构件有时还需要校核它的屈服强度？在什么情况下可以不进行这项校核？

11.59 疲劳问题中构件的工作安全系数与规定安全系数有什么区别和联系？疲劳问题中的许用应力与静载问题中的许用应力有什么区别和联系？

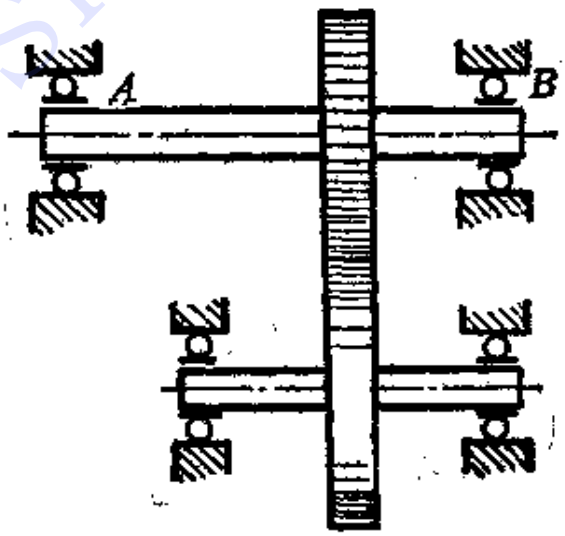
11.60 在非对称循环下构件基本变形的强度校核要满足以下两式

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon\beta}\sigma_a+\Psi_\sigma\sigma_m}\geqslant n;\quad n'_\sigma=\frac{\sigma_s}{\sigma_{max}}\geqslant n'$$

如果$n_\sigma<n'_\sigma$，是否构件一定会发生疲劳破坏？如果$n'_\sigma<n_\sigma$，是否首先会发生屈服破坏？

*11.61 承受交变应力的构件，危险点上的应力状态可能是复杂应力状态，载荷或应力随时间变化的情况，也未必象正弦函数之类具有规律性。在这些情况下如何进行疲劳强度核算？

11.62 图示传动轴AB，工作时所传递的扭矩和所受的横向力都没有变化，也没有反向转动，只是启动频繁。问轴中正应力



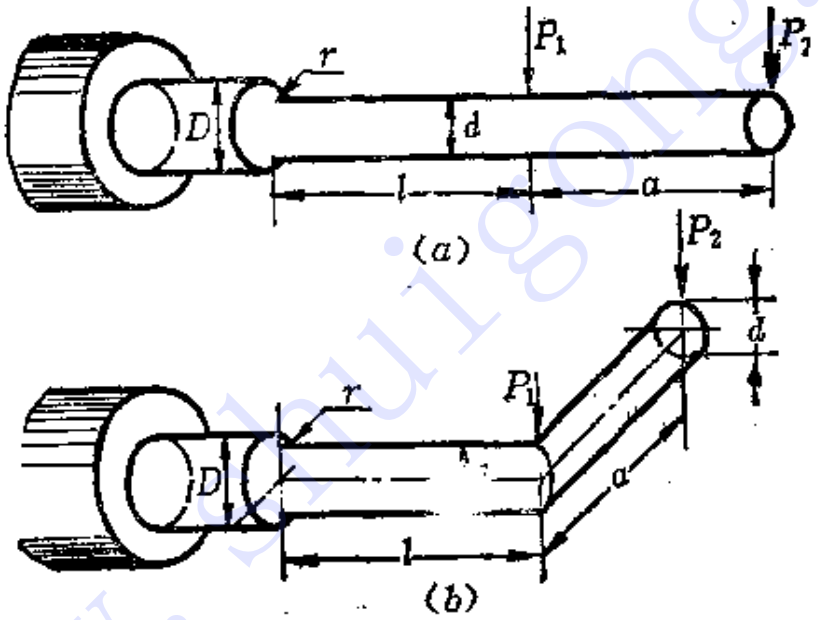
题 11.62 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

和剪应力的变化规律属于表中所列的哪一种情况？并写出其工作安全系数的算式。

情 况	σ	τ	正误
1	$r=-1$	$r=-1$	
2	$r=-1$	$r=1$	
3	$r=-1$	$r=0$	

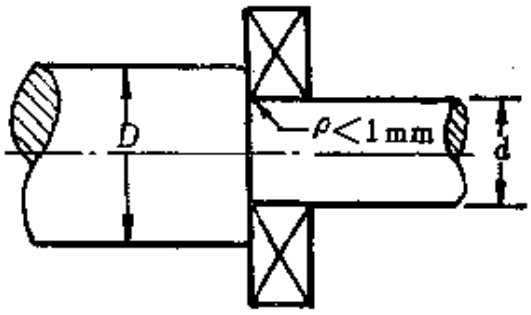
11.63 图示两杆除了直曲不同之外，其他条件完全相同。承受不变载荷 P_1 和对称交变载荷 P_2 作用，若要校核两杆的强度，



题 11.63 图

问它们的工作安全系数算式是否相同？

11.64 某传动轴轴颈处必须安装一种内圈倒角半径很小的滚珠轴承，如图所示，从而造成了轴颈处应力集中严



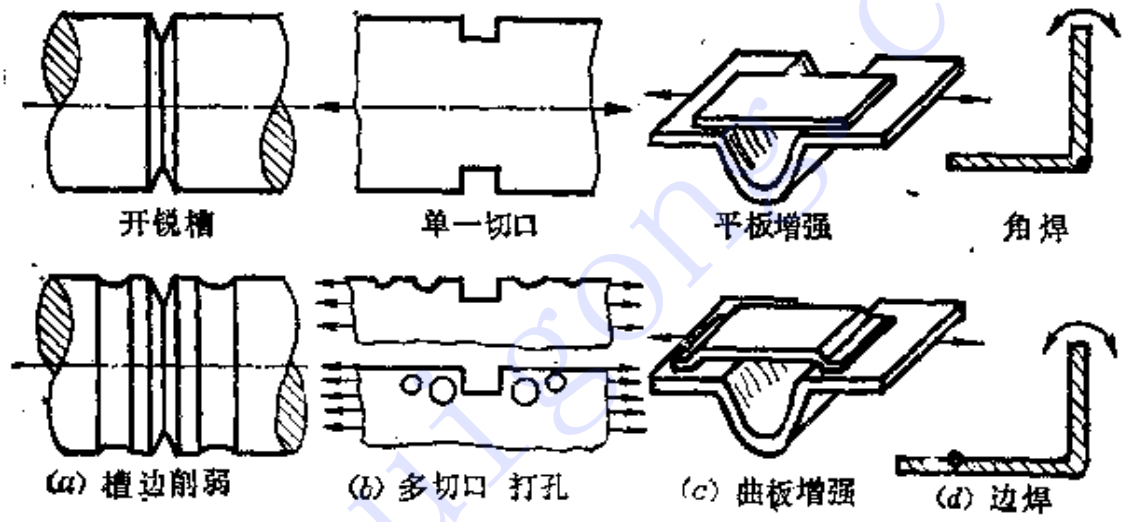
题 11.64 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

重。采取什么措施可以使安装这种轴承时有效应力集中系数不致过高？

11.65 某阀门弹簧，原设计中其表面未经任何处理，使用时经常发生疲劳断裂。改进设计后对其表面进行了喷丸处理，结果寿命大为提高。这是什么缘故？

*11.66 图示各种结构设计中，哪些方案有利于提高疲劳寿命？



题 11.66 图

*11.67 汽车、坦克和飞机等，其传动机械的设计中，既要考虑抵抗疲劳破坏的耐久性，也要考虑在最大“高峰”载荷下的可靠性。前者与机械在典型使用条件下作用载荷的大小和时间等因素有关；后者与偶然会遇到但又是最为严重的使用条件有关(例如车辆在困难条件下启动或爬坡)。试讨论这两种条件下校核强度的方法有什么不同。

11.68 从题11.64和11.66可以看到，零件和结构的局部形状设计，对于提高其疲劳寿命有重大影响。试搜集一些在疲劳强度上设计合理和不合理的工程实例，并提出你的看法。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

第十二章　综合性问题和其他

12.1　强度、刚度和稳定性问题都与变形有密切的关系。试问这三个问题所涉及的变形有什么相同和不同的地方？

12.2　试将所学过的各种强度条件、刚度条件和稳定性条件加以概括性总结，用一个统一的不等式来表示，并说明不等式两边的量具有什么性质，与哪些因素有关。

12.3　归纳一下，在整个材料力学课程中，采用过哪些主要的限制和假设。如果不满足这些限制和假设，会带来什么困难和问题？这些限制和假设是否符合实际情况？

12.4　在均匀、连续和各向同性的假设之下，材料力学中所取的微分单元体，若其尺寸大小类同于晶体、分子、原子的尺度时，微分单元体是否具有构件材料的微小粒子的原来属性？为什么？

*12.5　如果给你一块从月球上带回来的岩石标本，你打算做一些什么试验来确定它的强度限、弹性模量和泊松比呢？又怎样判断它是否均匀和各向同性呢？但要记住，这块标本是很贵重的。

*12.6　平面假设在材料力学中有着重要的地位和作用。可以通过实验观察提出这个假设；也可以用弹性力学的推导来证明；还可以利用对称性从逻辑推理上加以论证。试从最后一个途径，针对以下情况论证平面假设：（1）等直杆受轴向拉伸或压缩；（2）等直杆受纯弯曲；（3）等截面圆弧形曲杆受纯弯曲；（4）等圆截面直杆受纯扭转。

12.7　平面假设与杆件材料的变形性质是否有关？比如说，等直杆纯弯曲时产生了塑性变形，平面假设是否仍然成立？

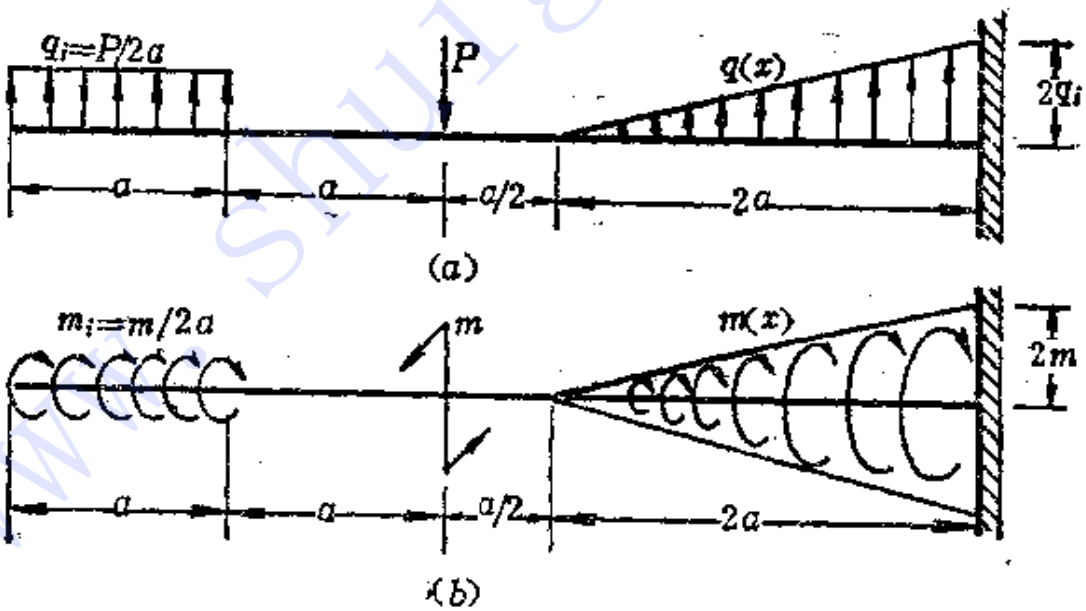
12.8　在理论力学中，往往以坐标方向来规定力的正负号。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

材料力学一般则从变形来规定内力的正负号，为什么不沿用理论力学的方法呢？截面法中用平衡方程求出内力的正负号又表示什么？

12.9 在材料力学中，针对不同的具体问题，讨论各种力之间的关系时（例如载荷与支反力之间、外力与内力之间、截面上内力合力与分布微内力之间、微杆段上各内力素与载荷之间、单元体上各应力之间等等的相互关系），都用过平衡的概念。在这些不同的情况下，平衡条件有哪些共性？又有哪些与示力对象的几何形状和受力状态有关的特性？通过材料力学的学习，你在各种情况下灵活运用平衡条件方面，是否比学习理论力学时又有了新的提高？在变形几何关系和物理关系的分析方面，是否也可以对各种情况下的共性和特性加以归纳和对比？

12.10 梁和轴受力分别如图 a 和 b 所示，其中 $m_i(x)$ 和 $q_i(x)$ 表示分布转矩和分布横向载荷。试比较两者的内力图以及内力与载荷之间的微、积分关系。



题 12.10 图

12.11 试对各种受力情况下杆件横截面上的应力分布图形、任一点的应力和最大应力的计算公式加以归纳、对比，从中寻找

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

它们的共性和特性，以及如何方便记忆的要领。

12.12 试对各种基本变形和其他受力情况下杆件弹性变形的计算公式加以归纳、对比，从中寻找它们的共性和特性，以及如何方便记忆的要领。

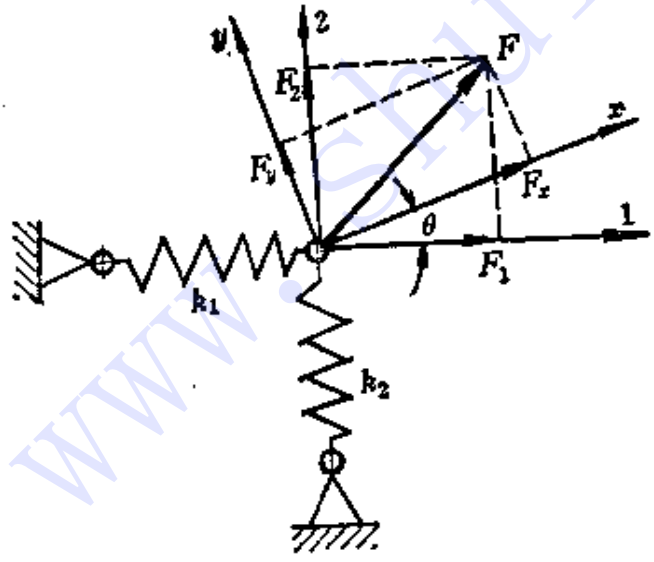
*12.13 怎样利用“小变形”的限制来简化问题的计算？这样做的精确性如何？在什么情况下可以利用这个限制条件而忽略某些变形不计？在什么情况下又不能忽略这种微小的变形？能不能在小变形分析的基础上设法计算较大的变形或位移？

12.14 回想一下，设计各种受力状态下杆件的横截面形状时，哪些形状较为经济合理？哪些形状的强度、刚度和稳定性较差？

12.15 为了提高各种受力条件下杆件的强度、刚度和稳定性，应当怎样选择构件的材料？

12.16 应力圆或应变圆以及材料力学中应力和应变的概念能否适用于非线性弹性变形的情况？为什么？

*12.17 两个弹簧的刚度系数分别为 k_1 和 k_2，它们正交联接成图示的系统。此系统在1-2，x-y 坐标方向上的柔度分别为：



题 12.17 图

$$c_{11}=\frac{1}{k_1}=\frac{\delta_1}{F_1}$$

$$c_{22}=\frac{1}{k_2}=\frac{\delta_2}{F_2}$$

$$c_{xx}=\frac{\delta_x}{F_x}$$

$$c_{yy}=\frac{\delta_y}{F_y}\qquad c_{xy}=\frac{\delta_x}{F_y}\qquad c_{yx}=\frac{\delta_y}{F_x}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

其中 δ_1，δ_2，δ_x，δ_y 分别为节点沿坐标 1，2，x，y 方向的位移分量；F_1，F_2，F_x，F_y 分别为节点力 F 沿坐标 1，2，x，y 方向的分力。试证明：

$$\delta_x = c_{xx}F_x + c_{xy}F_y \qquad \delta_y = c_{yx}F_x + c_{yy}F_y$$

并且在柔度 c_{xx}，c_{yy}，c_{xy} 与 c_{11}，c_{22} 之间的关系可以绘出一种反映柔度坐标变换的莫尔圆。

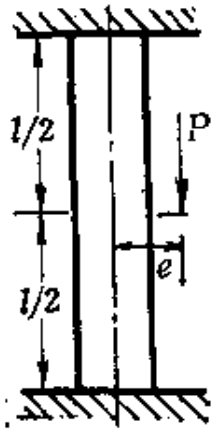
*12.18 对于各向同性的线弹性材料，三个弹性常数 E、G、μ 之间的关系是 $E = 2G(1+\mu)$。从理论上讲可以：（1）从 E、G 求 μ；（2）从 G、μ 求 E；（3）从 E、μ 求 G。若从测量误差的角度看，哪一种途径的试验难度最大？为什么？如果 E 和 G 的误差各为 5 %，那么由此得出的 μ 的误差有多大？

*12.19 试列举一些测定泊松比 μ 的可行方案，这些方案适用于什么范围的 μ 值测量？

12.20 纯弯曲、横弯曲、纵弯曲和纵横弯曲各有什么特点？其小挠度弹性挠曲线的基本微分方程有什么共性和特性？方程的解的形式有何异同？

12.21 试将求梁变形和解超静定梁的各种方法加以归纳、对比，并说明它们有何异同、各便于在什么情况下使用。

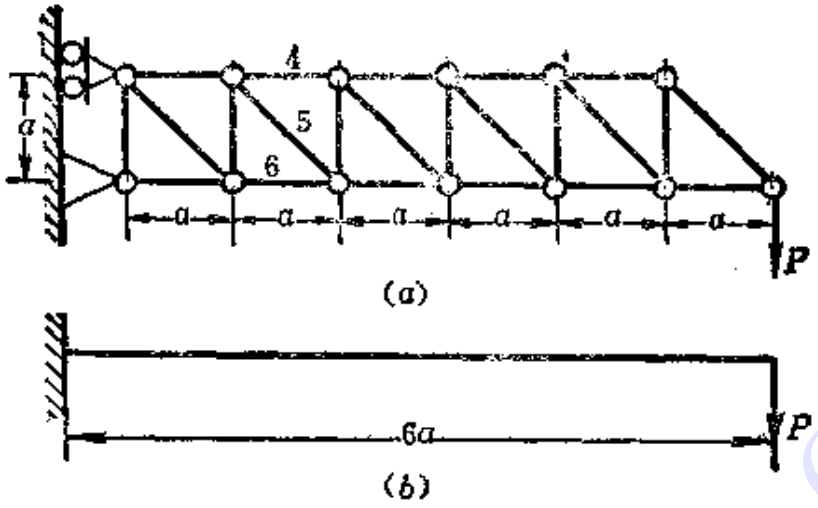
12.22 图示两端固定的直杆，中点受到偏心力 P 的作用，求它的最大正应力时，可以提出哪几种计算模型？各模型的适用条件是什么？



题 12.22 图

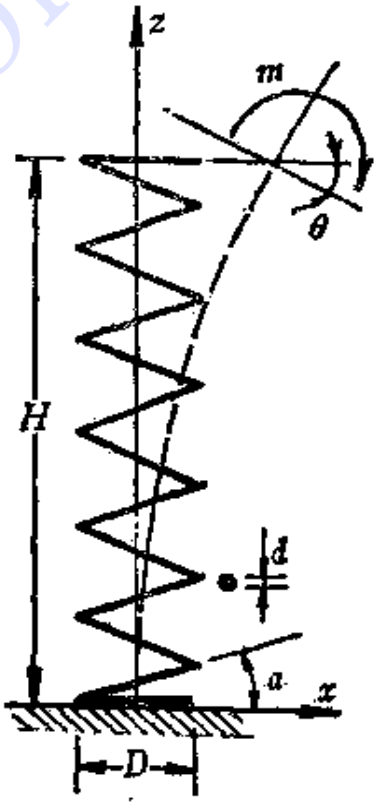
*12.23 图 a 所示桁架，各杆的截面积和材料均相同，试求 4、5 和 6 三根杆的内力。如果把桁架设想为一根悬臂梁(图 b)，此梁要具有等效（相当）弯曲刚度 B，试分别按最大横向挠度等效和总变形能等效，来计算等效弯曲刚度 B。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 12.23 图

*12.24 圆柱形螺旋弹簧受力矩 m 作用如图。已知弹簧的升角 α、圈数 n、簧圈平均直径 D、簧丝直径 d、高度 H 和材料的三个弹性常数。问簧丝横截面上有什么内力素？它属于哪种变形？如何计算弹簧端部的转角 θ？若弹簧沿中心线 z 受轴向压力，并把它看作等效弯曲刚度为 B 的悬臂杆，问如何求其临界压力？



题 12.24 图

12.25 在连接件的近似计算、密圈圆柱形螺旋弹簧和梁的横力弯曲中，剪力在圆截面上的分布是否相同？它们是否相互矛盾？能不能统一起来？

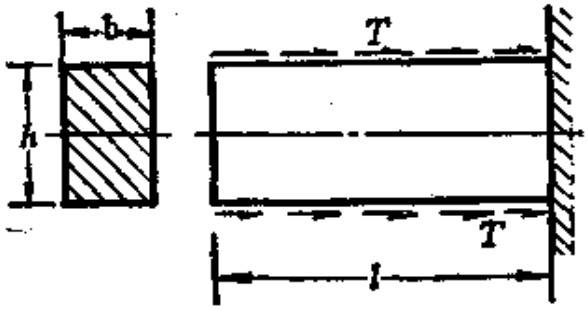
*12.26 如果你要设计运动员撑竿跳高所用的撑竿时，从材料力学的观点看，你应当考虑哪些基本的强度和刚度问题？

12.27 推导梁的剪应力公式时，认为微段 dx 两边的正应力是有差别的；在应力分析时，又认为微

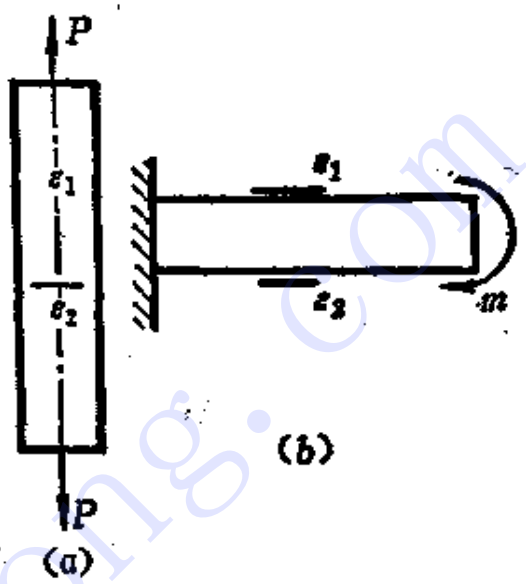
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

分单元体 dx 两边的应力一样大。两者是否互相矛盾？

12.28 图示矩形等截面梁在上、下表面作用有均布的切向载荷 T（力/长度），若平面假设仍然成立，且 $b<h$，$l\gg h$，问如何推导横截面上的应力公式？



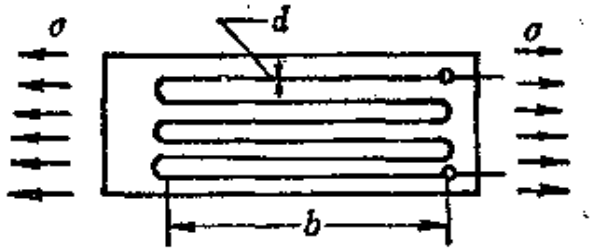
题 12.28 图



题 12.29 图

12.29 用电阻应变片测量拉伸试件的纵向和横向应变(图 a)，或测量纯弯曲的梁上、下表面的纵向应变（图 b），连同温度补偿片在内，最少要用几个应变片？

*12.30 图示电阻应变片中电阻丝的直径为 d，基距为 b，当它在纵向受到拉伸时，其电阻有何变化？为了估计电阻的变化，需要测量电阻丝的哪些力学性质？在温度不变的条件下，导体的电阻 R 与其长度 l、截面积 A 和电阻率 ρ 的关系是 $R=\rho l/A$。



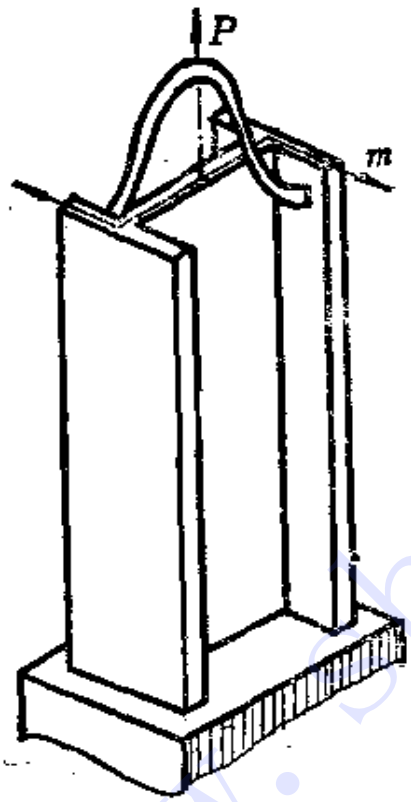
题 12.30 图

12.31 杜留（A. Duleau）在1820年发表了一个重要的试验结果，若把基于平面假设的圆杆扭转公式推广到矩形杆，并用这样的公式计算正方形杆的试验结果，则正方形铁杆的弹性常数

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

比工铁杆的要小很多。这曾使纳维大吃一惊。试说明用这样的公式计算，在理论上方杆的剪切弹性模量只有圆杆的84.6%。

*12.32 在材料力学中哪些地方运用了圣维南原理？在什么情况下不能应用这个原理？试考虑一个问题：工字钢受中心拉力 P 如图所示，其横截面的正应力是否仍可用 $\sigma = P/A$ 计算？如果它在顶端面内受到扭矩 m 作用，其横截面上是否只产生剪应力？



题 12.32 图

(a)

(b)

题 12.33 图

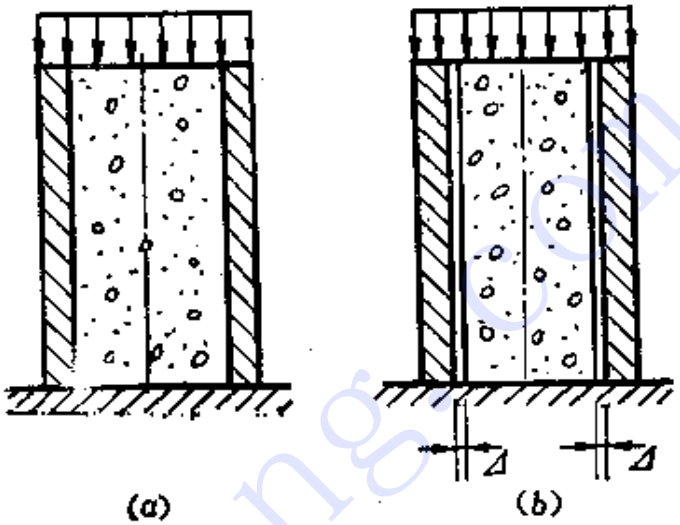
*12.33 已知 Z 字形截面薄壁杆件，在腹板上作用有均匀分布的拉力，如图 a 所示。其两翼缘是否也同腹板一起产生均匀的伸长变形？十字形截面薄壁杆件两端中心受压时（图 b），是否只产生均匀的缩短变形？试用具有一定刚度的软泡沫塑料板制作成模型并进行实验观察。

12.34 在春秋战国时期成书的《考工记》中，规定了戟一

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

类用于钩杀的兵器，其柄应制成扁圆形；而用于刺杀的长矛，其柄则应制成圆形。试问其中包含哪些有关材料力学的知识？

12.35 在钢管内灌注混凝土而成的混凝土钢管柱，如图a所示；图b则表示在混凝土柱外留有间隙地加套钢管。除了有无间隙之外，这两个受力体系的条件完全相同，问它们的承载能力是否相同？为什么？

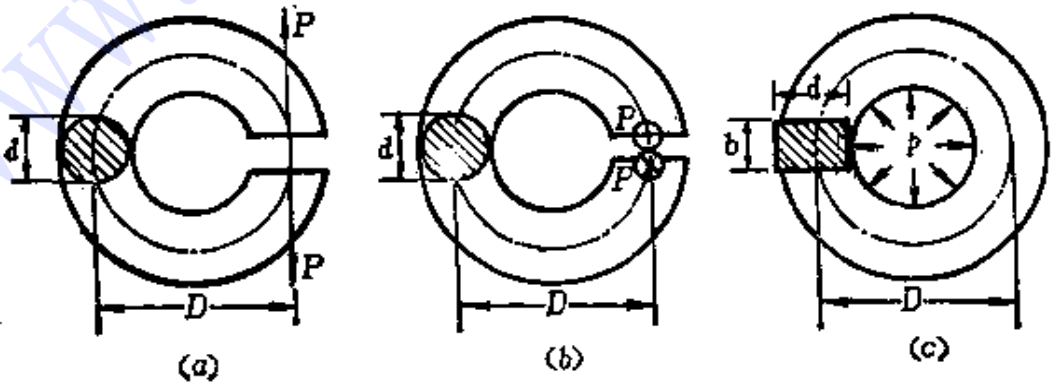


题 12.35 图

*12.36 接触应力与其他应力集中的情况有何异同？试举出几个工程上遇到的接触应力的例子。

12.37 1903年，英国海军部为了适应船舰吨位加大、自重减轻的发展需要，让海狼号驱逐舰出海，在恶劣天气的风浪袭击下进行船体应变实测。在测试中几乎没有一台应变计放在船体的重要孔口附近。从现代的观点来看，这个试验的设计有什么严重的缺点？

12.38 图a和b为圆截面开口圆环，缺口处分别受到一对



题 12.38 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

方向不同的力 P 作用；图 c 为矩形截面闭口圆环受均布内压 p 作用。当 $\frac{D}{d}>10$ 和 $\frac{D}{d}<5$ 时，试分别画出横截面上的正应力分布示意图，并指出危险点的位置。同时研究随着 D/d 值减小时横截面上中性轴（或零应力点）的移动趋向。由此体会曲率大小对于曲杆类零件的应力分布有什么影响。

12.39 据《华阳国志》记载：李冰清除滩险时，“其崖嶄峻不可凿，乃积薪烧之。”据《后汉书》记载：虞诩遇到泉中大石塞流时，“乃使人烧石，以水灌之，石皆坼裂”。据《明史》记载：王献开凿河道时，“石顽如铁。焚以烈火，用水沃之，石烂化为烬。”而古埃及人在开采象方尖碑一类大块石料时，先在岩石表面凿沟槽，勾出轮廓，然后沿着沟槽打深孔，再向孔里打入木栓或木楔，并让这些木楔子浸在水中，直到岩石沿着所要求的方向裂开。试分析这两种方法使岩石开裂的原因。

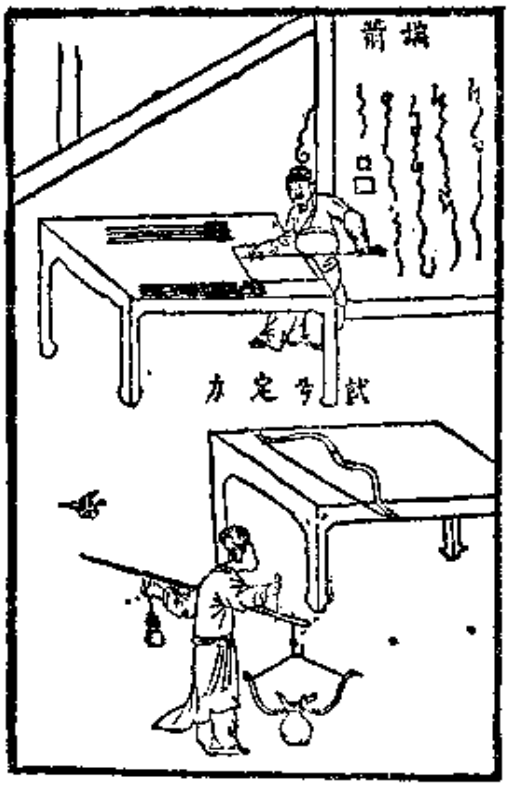
12.40 售货员卖布料时，总是先在布边上剪一小口，然后将布撕开，这是什么道理？如果不剪小口，又会怎样？

12.41 工人师傅切割玻璃时，先在玻璃表面用金刚石刀划痕，然后轻敲刻痕的两边，玻璃就依刻痕断开。为什么要这样做？

*12.42 有人作过计算，钢制潜艇在安全的极限潜水深度下，它的浮力要减小2%左右。这是什么缘故？从材料力学的角度来说，在潜艇的设计中，除了强度和稳定性问题外，还有什么重要问题需要考虑？

12.43 宋应星在1637年出版的《天工开物》中写道：“凡试弓力，以足踏弦就地，秤钩搭挂弓腰，弦满之时，推移秤锤所压，则知多少。”同时给出与文字稍有差异的插图。试指出“试弓力”实际上是测量弓的强度还是刚度。测量中利用了什么与现代材料试验机类似的力学原理？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



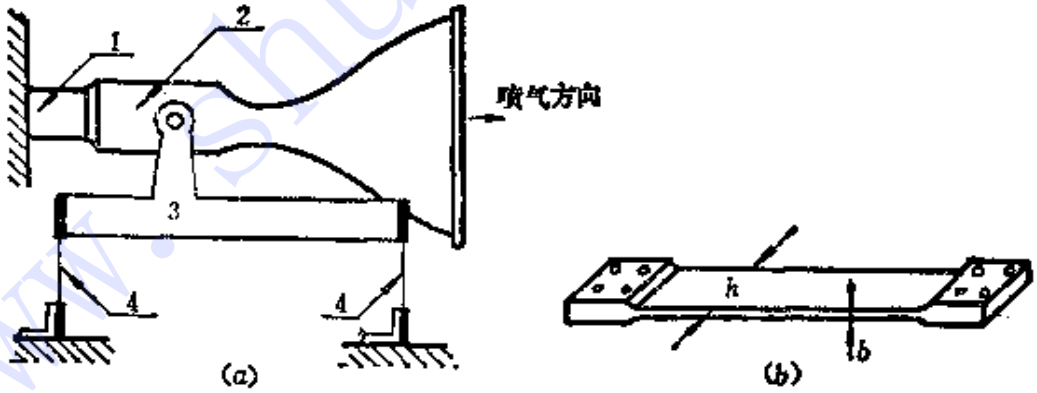
初刻本插图一〇一：试弓定力。

题 12.43 图

12.44 时间因素对材料的力学性质有什么影响？试举例说明。

12.45 当木弓和小提琴闲置不用时，为什么要把它们的弦线松开？否则会出现什么问题？

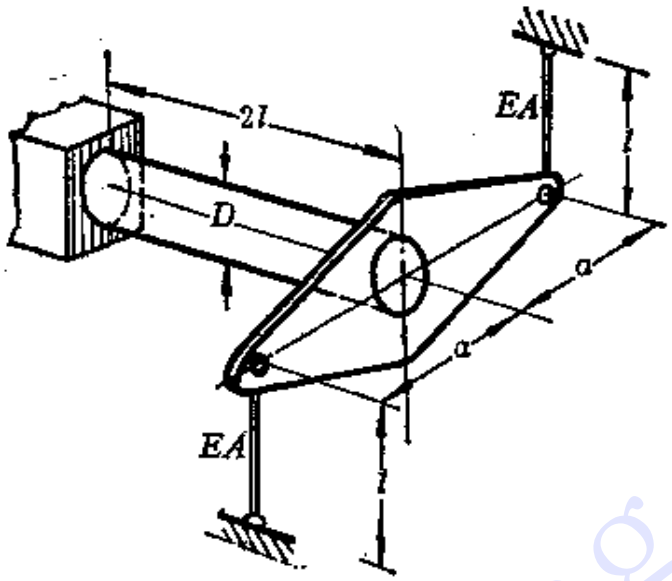
*12.46 为了精确测量飞机和火箭发动机的推力，往往采用弹簧铰来支承试车台，如图 a 所示（图中 1 为测力计，2 为发动机，3 为试车台，4 为弹簧片），其簧片见图 b。问对弹簧片应取怎样的计算模型？为使所测推力的误差较小，应怎样设计弹簧片？



题 12.46 图

12.47 圆杆一端固定，另一端与刚性板焊接，板又与两杆铰接，如图所示。当两杆一齐降温 t℃时，应如何计算圆杆表面与母线夹角为 $\alpha=45°$ 方向上的线应变？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



题 12.47 图

12.48 材料力学实验中，在测量应变或位移时往往先加预加载，然后再用等量加载的方法。这是为什么？等量加载和一次加载到最终值，两者所得实验结果是否相同？在压杆稳定实验中能不能用等量加载的方法？

*12.49 做材料力学实验时，你考虑过所得数据的精度问题吗？实验所用的机器、仪表的精度一般有两种表示法，即用示值误差和满量程误差来表示，你知道这两者的含义吗？所用仪器以满量程误差表示时，如何计算其测量值的误差？

12.50 在光弹性实验中，试样上有等差线和等倾线。所谓等倾线，是不是指线上每一点的切线方向就是该点的主应力方向？

12.51 沈括在《梦溪笔谈》中，讲了公元964年重建一木塔时有关著名建筑师喻皓的一段故事："钱氏据两浙时，于杭州梵天寺建一木塔，方两三级，钱帅登之，患其塔动，匠师云：'未布瓦，上轻，故如此。'乃以瓦布之，而动如初。无可奈何，密使其妻见喻皓之妻，赂（或贻）以金钗，问塔动之因。皓笑曰：'此易耳，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

但逐层布板讫，便实钉之，则不动矣。'匠师如其言，塔遂定。盖钉板上下弥束，六幕（面）相联如胠箧（这里指箱子），人履其板，六幕相持，自不能动。人皆伏（佩服）其精练。"这表明当时已初步认识到什么道理？

*12.52 如何估算钟表发条所储存的变形能？

12.53 什么叫许用应力法？什么叫许用载荷法或极限载荷法？试举例说明。

12.54 为什么只有当叠加原理适用时，才能采用许用应力法进行强度校核？

12.55 一根钢筋在中间已经产生塑性弯曲变形，为了把它调直，有人在两端施加力偶，结果中间未变直反而原来弯曲的附近产生新的反向弯曲变形，这是什么缘故？

12.56 塑性变形是否会引起物体的体积改变？试以轴向拉伸为例，导出理想塑性材料的塑性泊松比 $\mu_p \approx 1/2$。

12.57 塑性材料的应力应变关系，一般采用怎样的简化假设，就可看作理想塑性材料？这种假设与实际情况有什么出入？提出这种假设的目的是什么？按此种假设一般是否偏于安全？其近似程度如何？

12.58 在什么情况下，容许构件产生一定的塑性变形而不致失去效能？试举工程实例来说明。在这种考虑塑性变形的情况，按杆件或杆系的极限承载能力来进行设计的方法，有什么优点？

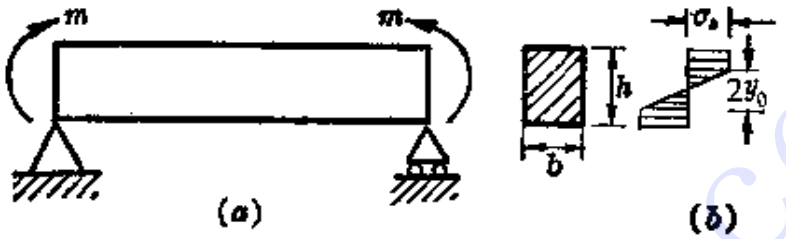
12.59 为什么实心圆轴扭转的剪应力公式 $\tau = M_n \rho / I_p$ 只能在线弹性范围内适用，而薄壁圆筒扭转的剪应力公式却在线弹性、非线性弹性和弹塑性情况下都能适用？

*12.60 图示一理想塑性材料的矩形梁在 m 作用下产生弹塑性变形，其横截面的应力分布如图 b。令 $\sigma_s \frac{bh^2}{4} = m_{js}$，由平衡条件可求得弹性核的尺寸

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$y_0=\frac{h}{2}\sqrt{3\left(1-\frac{m}{m_{1x}}\right)}$$

问如何写出此梁的挠曲线微分方程？　　提示：挠曲线由弹性变形所决定。



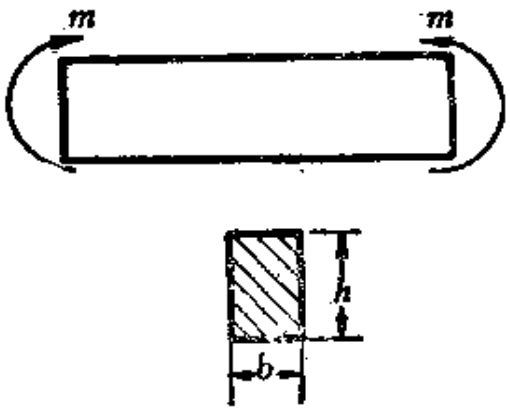
题 12.60 图

12.61　理想塑性材料的梁所出现的塑性铰与通常的铰有什么区别？

12.62　是否按许用载荷法设计的梁截面一定比许用应力法设计的要小？是否可以断定采用许用载荷法设计较为经济？

12.63　两端固定的梁，当其中出现一个塑性铰时，它是否已完全丧失了承载能力？为什么？两端简支的梁又将如何？

*12.64　图示一受纯弯曲的矩形截面梁，由屈服限为σ_s的理想塑性材料制成。当即将达到极限弯矩M_{1x}时撤去外力矩m。（1）试大致画出横截面上残余应力分布图，并说明是否会形成残余轴力和残余弯矩。（2）当梁重新承受正弯矩时，其线弹性最大弯矩是增大还是减小？（3）当梁重新承受负弯矩时，情况又如何？



题 12.64 图

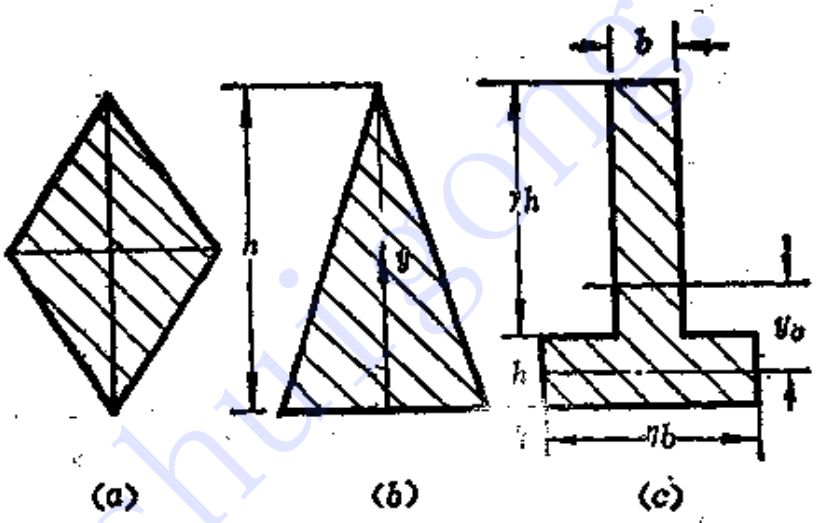
*12.65　梁受载达到弹塑性阶段时，平面假设和胡克定律是否仍然适用？这时怎样来

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

计算任一点的纵向应变？设矩形截面梁在横力弯曲时受到的最大弯矩为 $\sigma_s bh^2/5$，试求梁的最大线应变。当梁进入极限状态时，是否能用同样的方法计算？

12.66 圆形的弹性抗弯截面系数 $W=\pi D^3/32$，塑性抗弯截面系数 $W_{ps}=D^3/6$；空心圆形（内、外直径之比 $\frac{d}{D}=\alpha$）的弹性抗弯截面系数 $W\approx\pi D^3(1-\alpha^4)/32$，由此有人认为空心圆形的塑性抗弯截面系数 $W_{ps}=D^3(1-\alpha^4)/6$，对吗？

12.67 图示梁的三种截面形状，当截面上的弯矩逐渐向极限弯矩增长时，其中性轴将向哪个方向移动？



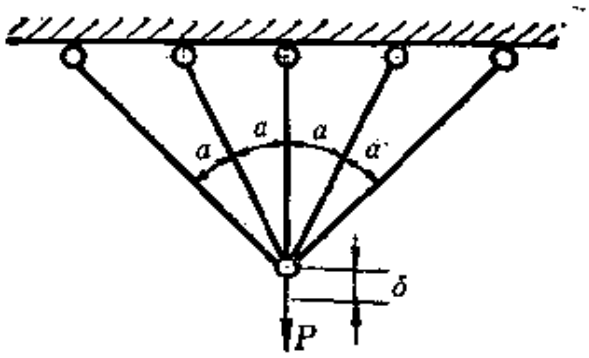
题 12.67 图

12.68 混凝土是脆性材料，为什么钢筋混凝土梁可以采用极限载荷法进行设计？

12.69 梁柱计算中的极限载荷（危险载荷）所根据的危险情况，与静定梁极限载荷法计算中极限载荷所对应的危险情况，有什么不同？

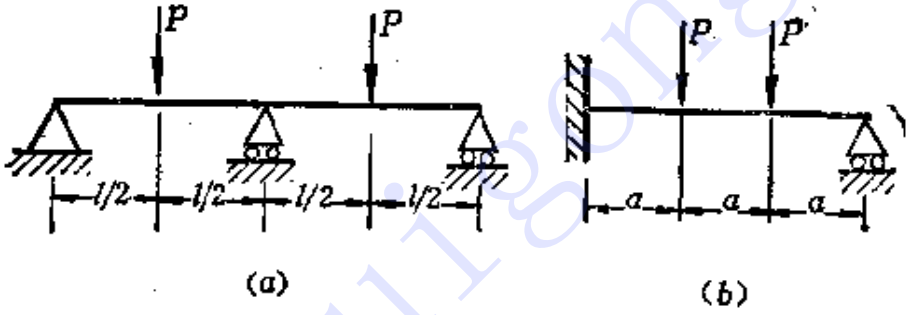
12.70 已知图示结构各杆的材料（理想塑性材料）和截面相同，屈服应力为 σ_s，试写出此结构的极限载荷计算式，并绘出其 P-δ 曲线的示意图。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



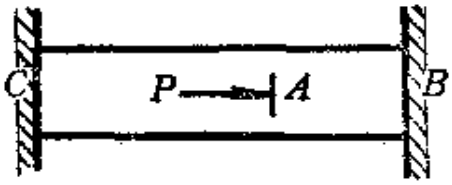
题 12.70 图

12.71 图示两等截面梁，当载荷增大时可能在哪里出现塑性铰？有哪些可能的极限状态的位形？



题 12.71 图

12.72 对图示杆件，（1）当$P>P_{js}$而使AB段产生塑性变形，然后卸去力P，问两段中哪一段受拉力？（2）若力P使全杆均进入塑性状态，而且两段的材料不同，问卸去力P后两段的内力又如何？



题 12.72 图

12.73 用冲压、焊接、紧固、热配合、淬火等工艺制造各种机械或结构物的零构件时，往往产生残余应力。试运用所学材料力学知识来分析产生残余应力的原因。

12.74 用电子计算机求解一般线性代数方程组，几秒钟即可

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

完成，并有多种计算方法及其计算程序（如迭代法、高斯消去法等等）。在材料力学中，哪些问题可以归结为求解线性代数方程组的问题？

*12.75 对于惯矩的转轴分析、平面应力分析与平面应变分析，存在着极为相似的数学表达式。是否可以只编一个子程序或函数段以供上述各种计算调用？试编这个子程序，并注意考虑子程序与主程序之间的信息如何传递。

*12.76 由题3.5可知，校核这类铆钉群联接的强度时，计算工作量往往很大。若利用电子计算机，（1）对于铆钉的直径不同而材料相同时，为了减少数组所占内存，并尽可能减少数据输入（例如重复数据尽量只输入一次），需要定义多少个数组、各数组是几维的？怎样充分利用数组元素所占的单元，即同一数组元素在不同的计算过程中可赋予不同的值（如铆钉的尺寸、内力、应力等等）？（2）如果铆钉的直径和材料不同且有多处铆钉群，并且还要校核被联接件的强度（包括剪切强度和挤压强度）时，又将如何考虑上述问题？

*12.77 用具有绘制初等函数图形功能的电子计算机描画梁的剪力图和弯矩图，编程序时怎样处理下列问题：（1）如何将载荷、边界条件作为已知数据输入？（2）如何考虑载荷、支反力、剪力和弯矩的正负号？（3）如何在计算机上实现梁的分段？（4）如何进行多项式的微分和积分？

*12.78 用初参数法表示的梁的弯矩、转角和挠曲线等函数都是奇异函数。在电算程序中怎样实现这类奇异函数的计算？

*12.79 你是否做过这样的习题：（1）三次以内的简单超静定杆系的等强度设计；（2）用折减系数法设计较复杂截面的压杆；（3）要考虑修正系数的密圈圆柱螺旋弹簧的设计。这些问题在求解中有没有什么共同的特点？在电子计算机上实现试算法或逐次逼近法时，如何画出计算框图并用好条件转移语句和循环语句来编写出程序？

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*12.80 要研究应力集中问题，可以用光弹试验加上电子计算机处理实验结果的办法。试编一个剪应力差法的较为通用的程序，并注意考虑能否在计算机上进行自动网格分割，如何输入实验结果等问题。

*12.81 对于线性结构，是否可以利用叠加原理计算支反力、内力、应力、应变和位移？在电子计算机上如何实现叠加法？在编写程序来计算上列各量时，如何尽可能地减少源程序所占的内存？

*12.82 力法正则方程可用矩阵形式写成

$$[\delta]_{r\times r}\{X\}_{r\times 1}+\{\Delta_p\}_{r\times 1}=0$$

其中 $[\delta]_{r\times r}$ 称为柔度矩阵。试问柔度矩阵是不是对称矩阵？是否一定是正定的？

*12.83 当以电测法测量构件许多点的应力时，用电子计算机整理实验数据是方便的。编程序时要注意使它所用语句最少，使用方便而具有通用性。设在一等量分级加载的静载实验中有 N 个测点，其中有 M 个直角应变花，其余为等角应变花。原始数据为应变仪读数，要求出每个测点的主应力大小和方向。试考虑下列问题：（1）每个电阻片的读数差是在计算机上计算，还是上机前事先算好，即输入的是应变仪读数，还是读数差？（2）如何计算每个电阻片的平均值，是只用一种方法，还是用各种方法（如算术平均、加权平均、均方根等等）分别编成各个子程序，以供随意选用？（3）如果都是直角或等角应变花，程序是否仍然适用？（4）计算主应力方向时，如何防止计算机溢出？（5）如果测点较多，是算完一点就输出，还是全部算完才一起输出？（6）输入和输出的数值，有时事先很难估计它们的大小，你将采用什么输入格式和输出格式？

*12.84 当弹性应力应变关系呈非线性而难以用初等函数来描述时，工程中往往采用切线法、割线法或双割线法等来近似表示它。如果用足够多的割线或切线来逼近，是否更接近实验曲线？

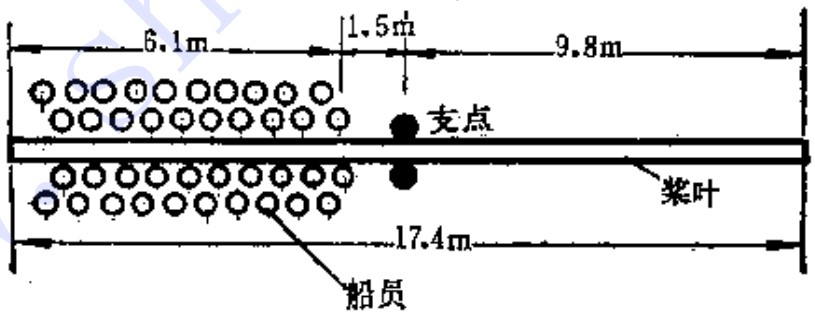
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

借助于电子计算机来实现，若将应力应变曲线分割成 N 段，即要输入 $N+1$ 个分段点的应力和应变数值，宜等步长分段还是变步长分段（即斜率大和曲率大的地方密分，其余疏分）？各分段点的数据输入之后，若给定一个应力，怎样求出对应的应变？

其次，是如何应用输入计算机的这些信息的问题。设有一上述材料的矩形截面梁受纯弯曲，假定平面假设仍然适用，当已知弯矩时，如何计算最大正应力？

最后，可进一步考虑两个问题：（1）对于纯剪的试验曲线进行分割、存贮以及求圆轴受扭的最大剪应力，相当于重复以上过程。在编程序时，如何考虑这方面的通用性？（2）如果用同样方法输入上述材料在拉伸时的纵向应变与横向应变的关系曲线，试设想如何应用已输入的数据计算二向和三向应力状态下的线应变。

*12.85　公元前221—205年，古埃及一个君主下令首席工程师Belisatius设计一艘特大的战舰。舰长128m，宽18.3m，一个桨就要40个人来划。显然，在当时这只是一种幻想。我们现在设桨示意如图，为了保证它有足够的强度，试研究下列具体问题：



题 12.85 图

（1）桨所受的最大载荷如何确定？

（2）作为初步设计，设想把桨做成等直圆杆，若木材的拉伸强度限为55MPa，如何确定它的直径？

（3）设计成变截面圆杆是否合理？其直径沿长度怎样变化

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

为好？

（4）采用圆截面是否最优方案？

（5）为了减轻劳动强度，利用铅锤作配重或许是个好主意。这时对上面四个问题有什么影响？

（6）木材顺纹拉伸的强度较大，而顺纹剪切则比较弱。桨会受扭吗？怎样计算扭转剪应力？

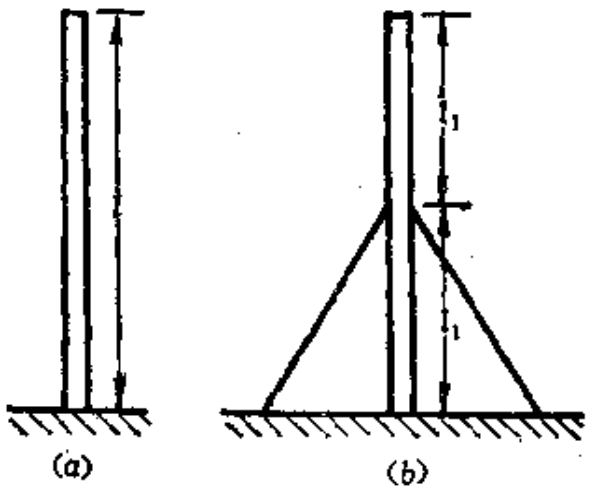
（7）沿桨的长度某一段做成空心的是否合理？

（8）将薄板钉在一起，把桨做成一个层合结构，这是否好主意？

*12.86 人造地球卫星跟踪站的水平扫描器由于扭摆断裂而意外失效。构件的材料与制造钟表弹簧的合金相似（40Co－20Cr－15Ni－7Mo－2Mn～0.15C－0.04Be－Fe），生产厂家给出它的$\sigma_b=2.2$GPa，$\sigma_s=1.65$GPa，$\tau_b=1.25$GPa，$\tau_s=900$MPa。构件是一直径为0.51mm、长为60mm的圆金属丝，顶端固定，底部是一个小圆盘。当频率为4 Hz时，两端从静止位置产生的相对扭转是±15°。如果轴向载荷等于零，摆是否会破坏？如果不会，并设只受扭转时，在$\tau_{max}=400$MPa下到破坏为止可以重复10^8次，问在连续工作一年之后使扭转振动产生危机的轴向载荷有多大？

*12.87 一个业余的无线电爱好者拟安装一天线塔，希望塔高与其成本之比尽可能的大。在着手安装之前他找你研究下面几个问题：

（1）考虑等截面的圆管型塔。在塔的中点装有三根拉线，如图b，这是一种方案；另一种如图



题 12.87 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

a 所示。当两个方案的圆管材料和内、外径相同时，试比较它们可以达到的高度。

（2）图 b 的方案装了拉线，因而可以改变塔底处的边界条件。那么，图 a 的方案也能改变端点条件吗？

（3）当把风作为主要的载荷时（假定风压均匀分布），这些拉线装在塔的什么位置最好？

（4）能用内部施加气压的薄壁圆管来使天线塔强化吗？如果可以的话，在强风和冰暴时就能提供很高的强度。当考虑内压时，这个问题应当怎样分析？

*12.88 设计用柔性塑料制造的人造心脏瓣膜时，要求能达到80年不间断的工作寿命。它基本上是一块薄圆片(厚 1 mm，直径 25mm)，并在边缘的 10mm 长度内固定。假如把瓣膜看成是装在理想刚性壁上的悬臂梁，使瓣膜打开的压力在圆片上是均匀分布的。在每次心脏跳动过程中，瓣膜的自由端（固定边的对面）相对于其平面位形的最大张开量约为10mm。所用材料的可信实验数据是：拉伸试验中的极限应力为35MPa，极限应变为0.08；疲劳试验中，在峰值应变为0.01下经1200次循环引起破坏。若给年轻的病人安装这样的心脏瓣膜，能够确信不致发生破坏吗？

*12.89 这是发生在核反应堆实验室里的故事。待辐射的物品每批重2.2kN，用绕在滚筒（直径为254mm）上的合金钢丝吊挂着，通过遥控的办法把物品下降和提升。工作温度约 540℃。每批物品更换时间较短，每昼夜有80%的时间钢丝吊挂着各批物品。由于钢丝的工作寿命不长，给生产和经济带来很大损失。例如要待反应堆冷却后才能检修，等等。从破断的钢丝上看到有高温蠕变的迹象。人们考虑降低钢丝的工作应力或许会得到改善，于是将原直径2.5mm 的钢丝（按生产厂家提供的资料，这种钢丝能工作30天以上）换成直径为3.8mm 的同类钢丝。结果出人意料，竟然用了 5 天就破断了。这是什么缘故？查了材料出厂资料，

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

可知540℃时这种合金钢丝的力学性能是：$E=138\text{GPa}$，$\sigma_{0.2}=620\text{MPa}$，$\sigma_b=827\text{MPa}$，$\delta=20\%$，在413MPa下的蠕变寿命为1000小时。你能帮助分析下列的问题吗？

（1）基本问题是什么？

（2）如果我们把钢丝放到显微镜下，将会获得什么信息？

（3）是否生产厂家把钢丝的力学性能数据弄错了（例如所提供的是另一种钢丝的数据）？还是我们这里有什么问题？

（4）为什么换了粗的钢丝反而比细的钢丝寿命短？如果我们试用直径为5 mm的钢丝，其前景将会如何？

（5）是否我们还是采用原来粗细的钢丝为宜？

（6）有人建议采用比原先更细的钢丝，你对此不会感到惊奇吧！？想想其前景又将如何。

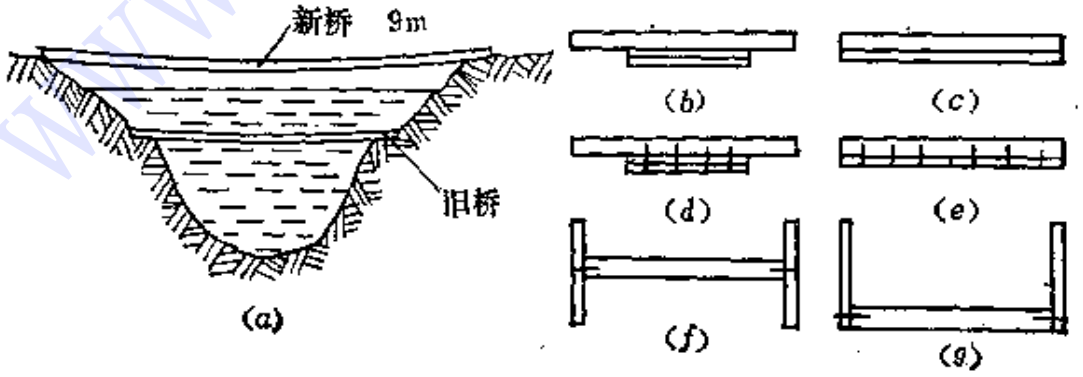
（7）若从研究材料性能的角度看，稍为降低钢丝的工作温度，会有实质性的帮助吗？

（8）从目前的工作条件看，在钢丝的订货单上，应提出哪些合理的性能指标和要求？

（9）在钢丝放入反应堆使用之前，有没有简易的检验办法，以便确认钢丝符合要求？

（10）如果我们要在模拟工作条件下测定钢丝的寿命，能否缩短试验时间，并获得有用的结果？

*12.90 一场严重的洪水威胁着某个村庄，村民们必须撤离。



题 12.90 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

但洪水淹没了原有的小桥，使人们不能方便地过河。重新搭桥要有9 m长，沿河床的截面如图 a 所示。人们很快找到两根直径为0.1m的旧长木杆，并用0.6m长的薄板把它们组装起来。有人估算了一下此桥的承载能力，建议每次只能通过一个体重较轻的人。计算的模型和公式想必读者是熟悉的，结果是：对于重量为734N的人最大弯矩约为1.65kN·m，每根木杆的最大正应力为8.4MPa，而木材的拉伸强度大约等于55MPa。出乎意料的是，当一个小孩通过时，木杆竟然断了，幸好落水的小孩得救。后来又找到几根较新的木杆，马上要用来搭桥，……。关于紧急搭桥有许多问题，试考虑其中几个如下：

（1）原来的估计有什么疏忽的地方？若木材的重度为5.43 kN/m³，桥上没有人时木杆是否有应力？最大应力有多大？

（2）用四根木杆构成的桥上，同时能通过多少人？

（3）为了有效地利用较短的木杆，把它钉在长杆的什么位置为好？

（4）当桥上没有人，以及小孩（重约445N）接近桥的中心而未破断之时，那座两根木杆的桥的最大挠度怎样计算？

（5）当桥用同样的四根木杆构成，有一个人背着一个病号，或两个人用担架抬着一个病人，他们能安全通过吗？

（6）若找到三块9 m长的木板，一块50mm厚、610mm宽，另两块都是25mm厚、300mm宽。在构造新桥时，有两种简单的叠置方法，其横截面如图 b 和 c，问哪一种比较好？两种方法都能安全吗？

（7）考虑把这三块板钉在一起，图 d 到 g 所示四种截面形式，哪一种最好？

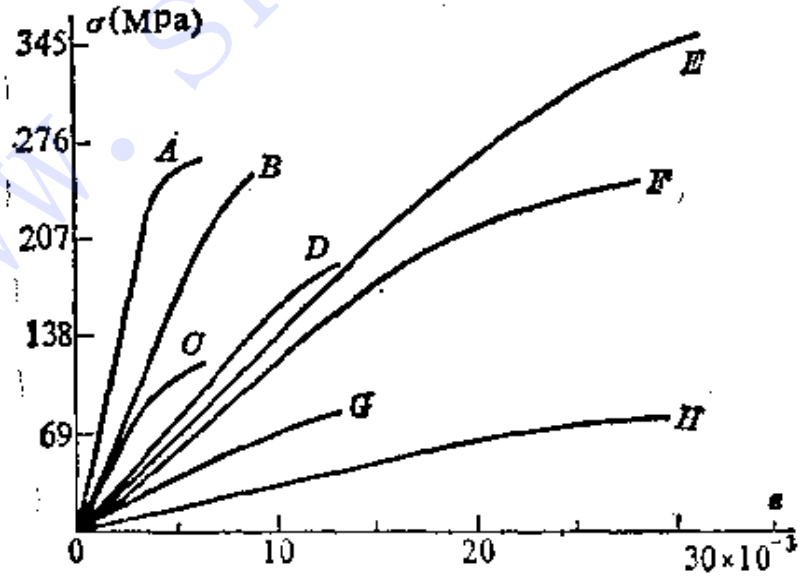
（8）在定出利用这三块板造桥的最好方案后，试确定人们通过时两人之间容许的最小距离。

（9）若钉子的直径为3 mm，$\tau_s = 172\text{MPa}$，试描述一种用钉数最小的方法。因为在紧急造桥时不一定能找到很充足的钉子。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*12.91 由于在医治牙病上的痛苦经验，促使怀有好奇心的人去思考有关牙齿的某些问题。你或许听到过一些对于牙齿的化学效应，因而不要吃这个、不要喝那个。尽管有关力学效应的资料是重要的，可是似乎普遍缺少这方面的资料。如果你走访了医学研究机构并查阅了有关资料，或许你会发现：从材料力学的角度看，即使有关牙齿的知识太少，但已有的知识就很能吸引人了。无论从宏观或微观上看，牙齿的结构是复杂的（微观上尤其令人惊讶）。人的腭能施加的力可达到1300N。对于珐琅质和牙本质（处于一薄层珐琅质内的材料），表中的平均数据可供应用。也

	珐 琅 质	牙 本 质
弹性模量	34.4GPa	11.7GPa
压缩比例限	207MPa	138MPa
压缩强度	276MPa	276MPa
拉伸比例限	——	约34.4MPa
拉伸强度	——	34.4MPa
导热系数	$9mJ\cdot s^{-1}\cdot cm^{-1}\cdot C^{-1}$	$6mJ\cdot s^{-1}\cdot cm^{-1}\cdot C^{-1}$
密 度	$2.8g/cm^3$	$1.96g/cm^3$



题 12.91 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

可以找到某些牙组织和修补材料的应力-应变曲线，如图所示，其中 A 为硬质镍牙金合金，B 为珐琅质，C 为软质镍牙金合金，D 为硅陶瓷，E 为汞剂，F 为牙本质，G 为锌磷酸钙陶瓷，H 为树脂填充材料。遗憾的是，表上的数据不一定与曲线符合，因为没有标准的牙齿。

对这些资料加以研究，我们就可以讨论有关牙齿的一些有趣问题。下面是工程师心里或许会想到的几个基本问题：

（1）牙齿所受的载荷是什么类型？在正常人的一生中大约受到多少次载荷？

（2）在正常条件下，估计一下牙齿中的最大应力。

（3）除了已经找到的以外，还有哪些有关牙齿的力学和物理性质需要了解？

（4）对于未填补的齿腔，它可能的力学效应如何？

（5）若已知修补材料的应力—应变曲线，对于已填补的齿腔（浅的和深的），它可能的力学效应又如何？

（6）在各种修补材料中，可以估计到哪些与时间有关的重要的变化？

*12.92 在严寒地区铺设管道时要考虑些什么强度问题呢？例如，比我国从大庆油田到大连港更为严寒的地区铺设一条输油管道，其有关数据、条件和构造设想如下。

尺寸：管道总长1300km；每段管长12m，壁厚13mm，直径1.2m。

构造：焊接；尽可能将不加绝热层的管道埋入永冻层内，地面的管道加绝热层并每隔 9 m 设一支座（水平放置的柱铰，可以防止斜坡的管道下滑）；管道施工时的气温高于－12℃。

工作条件：始点站的油温为62.8℃；在远处管道的油温，冬季降至－1.1℃，夏季仍为62.8℃。正常的油压为6.2MPa；暂停后的启动压力，对于冷却到－16.7℃的管子容许达到7.6MPa。

钢管材料性质：最小的 $\sigma_{0.2}=413$MPa；在低于冰点的温度

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

下钢管保持韧性；0.4%的拉应变远低于极限的拉应变，但压应变超过0.4%时管子发生屈曲。

重量：充满油的直线管道14.6kN/m。

地震影响：地震波对管道施加的横向载荷为3kN/m。

在着手这项任务时，你将如何考虑下列问题：

（1）上面提到的各个方面是否有明显的疏忽或差错？

（2）对于管内给定点处的峰值应力来讲，最恶劣的工作条件如何？

（3）由于钢管自重在管内所引起的最大应力在什么位置？有多大？

（4）有一段30m的长度内各支座沉陷了0.3m，这可能引起的最坏影响是什么？如何计算仅由此产生的最大应力？

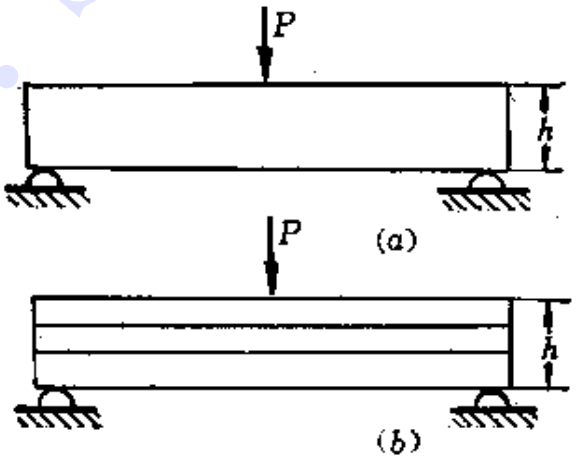
（5）温度变化（包括增温和降温）所引起最大的可能的应力有多大？

（6）计算由内压引起的应力。

（7）管子会发生扭转吗？如果可能发生，试估计由此而引起的最大应力。

（8）如果丢失了一个支座，将产生什么后果？

*12.93 如果你开始学习空手道（气功），有一件事看来是



题 12.93 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

有趣的。用赤手空拳作一次击断木板的表演，这牵涉到肌肉强度、打击速度、木材强度以及技术的水平和观众的注意、……等等许多问题。从材料力学的观点，有一个问题似乎是基本的。应该对单块木板还是对一叠木板（两者总厚相同，见图）作练功表演呢？当然，所比较的这两种方案中除单块与层叠这点不同之外，其他条件完全相同。此外，假定观众离你只有 3 m，因而不易受骗，所以你在采用某种巧妙的方案时，还要注意不致露出破绽。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

答案和提示

第二章　拉伸和压缩

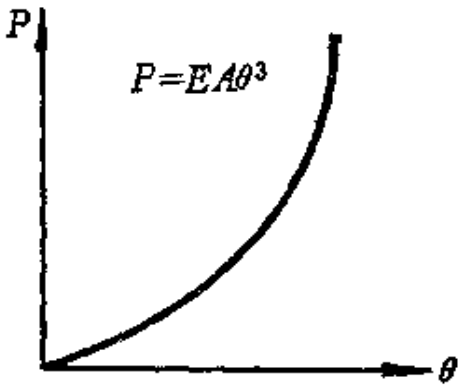
2.17　例如可见文献〔1〕第1版138页或第2版281、283页。

2.19　例如可见文献〔1〕第1版64页或第2版82—83页。

2.20　有的塑性材料拉伸与压缩的屈服应力存在明显的差异。例如可见文献〔2〕表1（第1版54页或第2版60页）。

*2.25　有的塑性材料（如某些铝合金、合金钢等）可压至破裂并测出压缩强度限。有的脆性材料（如某种铸铝合金）可压扁但不破裂。例如可见文献〔3〕的有关讨论。

*2.31　$P=EA\theta^3$，其中 E 和 A 分别为弦丝的弹性模量和截面积。P-θ 特性曲线如图所示。



答 2.31 图

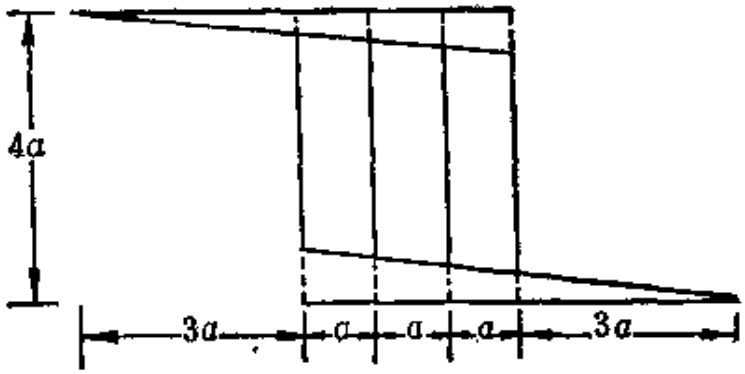
*2.32　例如可见文献〔4〕372页或文献〔5〕37页。

*2.44　(a) 的载荷对称，所以变形也对称，即 $\Delta l_1=\Delta l_3=|\Delta l_2|/2$，于是 $N_1=N_3=|N_2|/2$；(b) 的载荷反对称，所以变形也反对称，即 $\Delta l_1=|\Delta l_3|$，$\Delta l_2=0$，于是 $N_1=|N_3|$，$N_2=0$。

*2.46　(a) $\Delta l_2\sin(\alpha+\beta)=\Delta l_1\sin\beta+\Delta l_3\sin\alpha$；(b) $\Delta l_1-\Delta l_2=\Delta l_4-\Delta l_3$。

2.47　几何关系如图（按两力相向而画出）。各杆内力相同为 $N=4P/15$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 2.47 图

*2.54 大于 $l\cos\theta$ 一个 δ 值。$\delta=\dfrac{[\sigma]l}{E}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$。

*2.55 $\sigma(r)=\dfrac{15P}{17\pi R^2}\left(1+\dfrac{r}{5R}\right)$，其中 R 为圆杆半径，r 为轴线至任一点的径向距离。

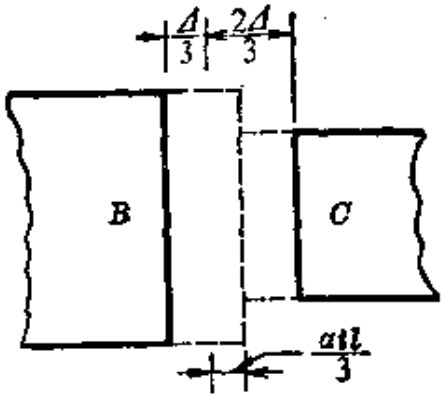
*2.56 $\sigma_1=\dfrac{P_b}{\left(A_1+\dfrac{E_2}{E_1}A_2\right)}$，$\sigma_2=\dfrac{P_b}{\left(\dfrac{E_1}{E_2}A_1+A_2\right)}$。

*2.57 接触以后端面 B 和 C 的位移分别为

$$\delta_B=\frac{1}{3}(\Delta+\alpha tl)$$

$$\delta_C=\frac{1}{3}(2\Delta-\alpha tl)$$

其中 α 为材料的线膨胀系数，t 为升高的温度。接触面如图中虚线所示，具体的位置与 t 有关。



答 2.57 图

2.60 $R_t=\alpha EA\left(t_A+\dfrac{t_B-t_A}{n+1}\right)$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*2.62 $P=330\text{kN}$，有残余应力 $\sigma_1=-24\text{MPa}$，$\sigma_2=48\text{MPa}$。

第三章 剪切和扭转

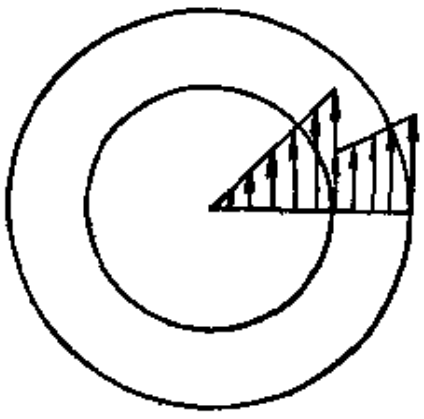
*3.5 例如可见文献[6]116-119、125-128页或文献[7]§15.3。

*3.20 母线显然伸长了。对于低碳钢，试件的直径和长度变化甚微。精密测量表明，强化材料在大塑性扭转后长度增加，而非强化材料（如铅）则缩短。一般金属试件的纵向、径向应变和体积应变，数量上比最大剪应变小二至三个数量级。对于聚合物材料，这种效应变得明显了，称为坡印廷 (Poynting)效应。致密的聚合物材料受扭后试件伸长、体积增大，而疏松的聚合物材料则试件缩短、体积减小。某些聚合物材料还会先伸长后缩短，这与高分子材料的分子结构有关。

*3.23 A 面与 E 面的线位移相等，角位移不相等。

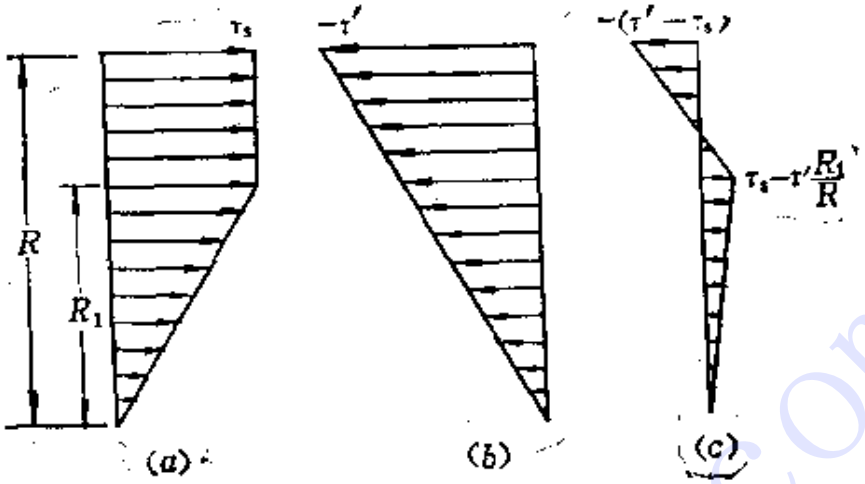
*3.25 $\tau_i=\dfrac{M_n G_i \rho}{\Sigma G_i I p_i}$ 其中 ρ 为一点到圆心的径向距离。剪应力分布如图。

*3.26 设扭至局部屈服时应力分布如图 a；卸载过程是完全弹性的，因而应力分布如图 b；两者叠加得残余应力如图 c。若重新加载与原加载转向相同，则屈服应力为 $\tau'>\tau_s$，即屈服限相应提高。若重新加载与原加载转向相反，则屈服应力为 $\tau''=\tau_s-(\tau'-\tau_s)=2\tau_s-\tau'<\tau_s$，即屈服限相应降低。工程中对圆柱形螺旋弹簧进行“强压立定处理”，使簧杆内产生局部塑性变形，从而提高弹簧的承载能力，就是这个道



答 3.25 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 3.26 图

理。

3.28 例如可见文献〔8〕。

3.29 若采用圆柱形螺旋弹簧并按中等体重者设计，则体轻者感到它太硬、弹性不好，而体重者会把它压紧，因而也感到弹性不好。沙发弹簧却不同，由于体轻者主要使大圈即弹簧的两端部分受压，体重者虽会使大圈压紧但细圈即弹簧中部仍处于较好的弹性状态，所以两者各得其所，都感到有较好的弹性。

3.31 可见文献〔9〕§3.9和文献〔10〕。

3.33 开尔文和泰特认为，凹角处的剪应力是无穷大。详见文献〔11〕40页。

3.34 可见文献〔12〕。

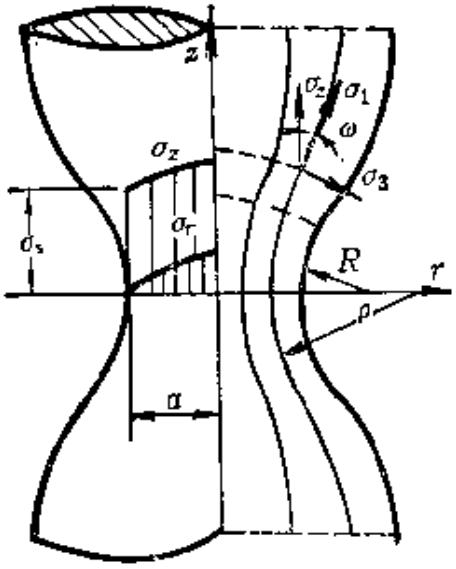
*3.40 由于截面图形对称，而受力反对称，所以在图形的对称轴线即腹板上，反对称的剪应力等于零。

*3.41 例如可见文献〔2〕§23，文献〔4〕§46，文献〔13〕§8.7，文献〔14〕138页，文献〔15〕121页或文献〔16〕89—90页。

第四章 应力状态和强度理论

4.10 圆试件产生颈缩后，颈缩区域处于不均匀的轴对称分

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 4.10 图

布的三向应力状态。颈缩区域中央截面中心处为三向拉应力状态且应力值最大，从X光照片也可看到在该处首先出现开裂。由于颈缩区域的塑性变形属于各向异性的有限变形，它的发展受到材料性质、环境温度和加载速率等多种因素的影响，因此，详细分析颈缩区域的应力分布是比较复杂的。按某种近似解析解所得出的颈缩区域中央处的轴向应力σ_z、径向应力σ_r和周向应力σ_θ(认为$\sigma_\theta=\sigma_r$)的分布，如图所示。文献〔49〕169—189页研讨了有关近似解析解的争论问题。近年来，一些人用有限元法对颈缩过程进行了比较成功的数值模拟。

4.14 例如可见文献〔17〕和文献〔22〕题6.14。

4.22 磁铁内的单元体有偶极应力作用，此时剪应力不互等。剪应力和偶极应力要满足动量矩方程。

4.24 44MPa。

4.30 可见文献〔18〕第1版下册207—208页。

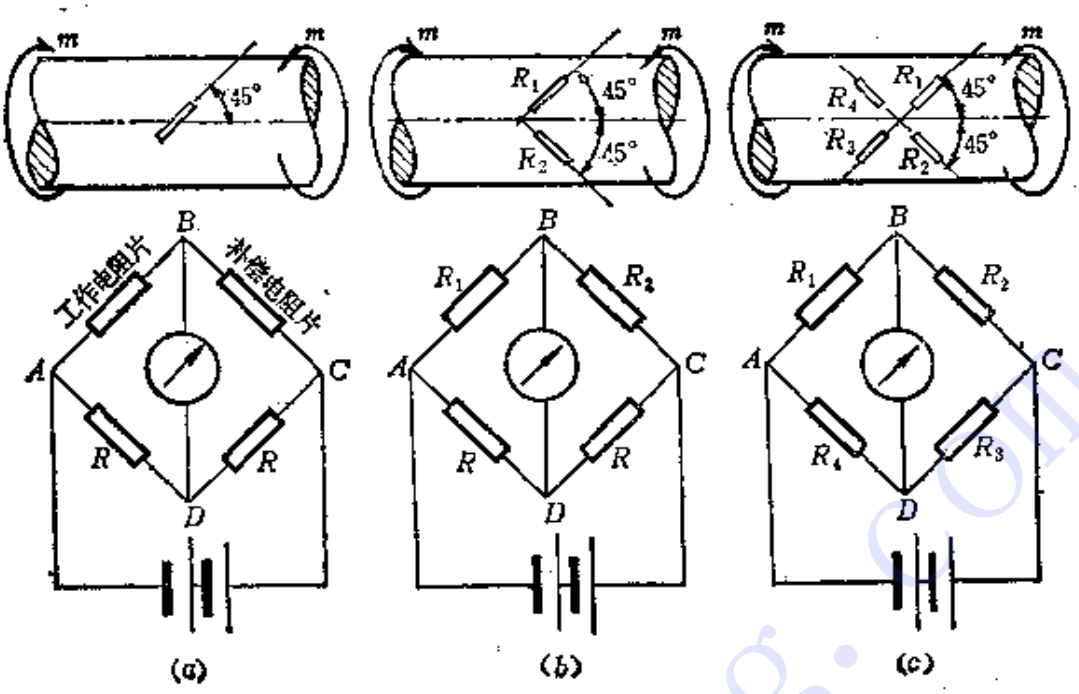
*4.34 试举三种方案如图，应变仪读数为ε，工作片数为n，则$m=\varepsilon EW_s/n(1+\mu)$。

4.38 只要 $\dfrac{1-\mu_1}{E_1}\neq\dfrac{1-\mu_2}{E_2}$，就产生轴向应变。

4.42 在考虑本题时，要注意在拉伸和压缩过程中灰铸铁的泊松比是变化的。这可参见文献〔19〕324页和文献〔20〕57页。

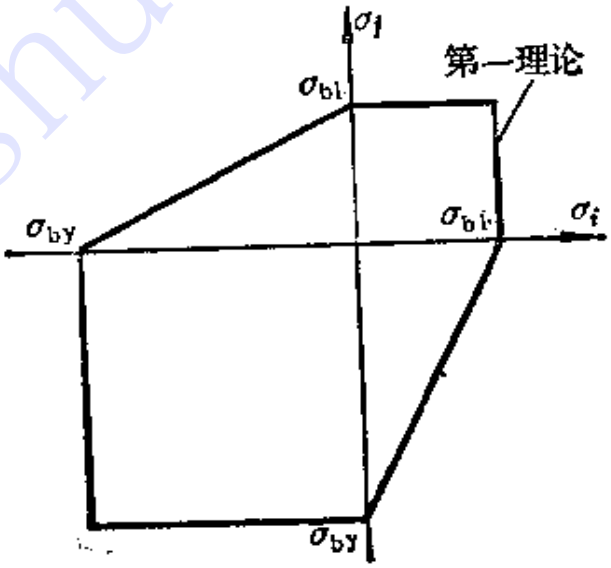
*4.49 $\sigma_2=(\sigma_1+\sigma_3)/2$（包括纯剪）时相差最大，此时$(\sigma_{xd3}-\sigma_{xd4})/\sigma_{xd4}=15.4\%$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 4.34 图

4.63 以拉伸强度 σ_{b1} 小于压缩强度 σ_{by} 的材料为例，修正后的极限曲线如图所示，即为简化的莫尔强度理论的极限曲线。当泊松比 $\mu=\sigma_{b1}/\sigma_{by}$ 时，斜线也是第二强度理论的极限曲线。



答 4.63 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*4.64 应大于45°。可见文献〔21〕265-267页、278页，或文献〔22〕题2.4。

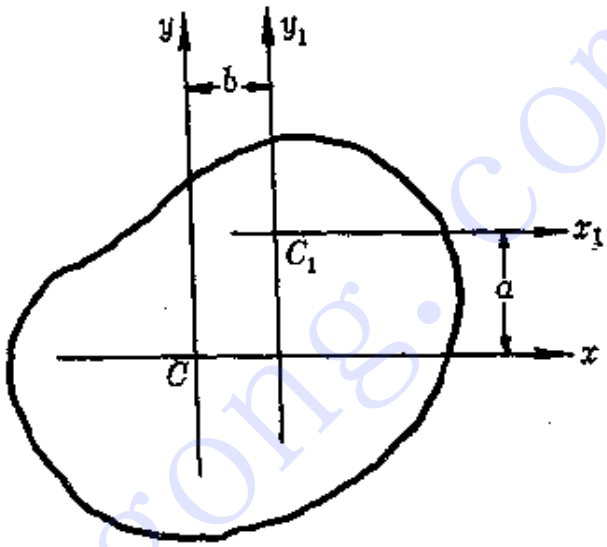
第五章 平面图形的几何性质

*5.7 如图所示，设任意图形对形心 C 的极惯矩为 I_p，对任一点 C_1 的极惯矩为 I_{p_1}，于是

$$I_{p1} = I_{x1} + I_{y1}$$
$$= I_x + a^2A + I_y + b^2A$$
$$= I_p + (a^2 + b^2)A$$

∴

$$a^2 + b^2 = (I_{p_1} - I_p)/A \qquad (a)$$



答 5.7 图

由题意 I_{p_1} 不随 C_1 的位置而变，所以 C_1 点的坐标 a 和 b 应满足的方程 (a) 是圆方程，即极惯矩相同的各点 C_1 连成一个半径 $R_i = \sqrt{(I_{p_1} - I_p)/A}$ 的圆，图形形心 C 即为圆心，对不同的 I_{p_i}，半径 R_i 各不相同，构成一同心圆族。

5.12 过 O 点的所有轴都是主轴。可参见题5.19的答案。

*5.17 $$I_x = \left(\frac{\pi d^4}{64} - \frac{a^4}{12}\right) + \left(\frac{\pi d^2}{4} - a^2\right)\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5\pi d^4}{64} - \frac{7d^4}{48}$$。可参见题5.19的答案。

*5.18 $I_y = I_x$。可参见题5.19的答案。

*5.19 与应力圆相类似，可得到用于惯矩计算的莫尔圆——称为惯矩圆。在回答题5.12、5.14、5.16、5.17和5.18时，读者可能运用了转轴公式等来分析。若利用惯矩圆并注意到其惯矩圆

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

为点圆的特点，可以很方便地回答这些题。

5.22 $I_{z_1}=[\cos\alpha,\ \sin\alpha]\begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{yz} & I_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{bmatrix}$。

第六章 弯 曲

6.1 当 Q、M 全部取正向时有：(a)、(b)、(g)、(h) $\frac{dQ}{dx}=q$；(c) 至 (f) $\frac{dQ}{dx}=-q$；(a) 至 (d) $\frac{dM}{dx}=Q$；(e) 至 (h) $\frac{dM}{dx}=-Q$。

6.3 $$Q_2=Q_1+\int_{x_1}^{x_2}q\,dx=Q_1+\omega_{12}^q$$

$$M_2=M_1+\int_{x_1}^{x_2}Q\,dx=M_1+\omega_{12}^Q$$

上列两个积分关系表明：在没有集中力作用的一段梁上，右端截面的Q_2，等于左端截面的Q_1加上两截面间 q图的面积ω_{12}^q；在没有集中力偶作用的一段梁上，右端截面的 M_2，等于左端截面的M_1加上两截面间 Q 图的面积 ω_{12}^Q。

*6.8 $\frac{dM(x)}{dx}=Q(x)+m(x)$，沿梁长 $Q(x)$为常量。

*6.10 将载荷 q 向直梁的轴线分解为轴向载荷 q_x、横向载荷 q_y 和力偶 m，取微段如图 a，由平衡得

$$\frac{dN}{dx}=-q_x,\qquad \frac{dQ}{dx}=q_y,\qquad \frac{dM}{dx}=Q+m$$

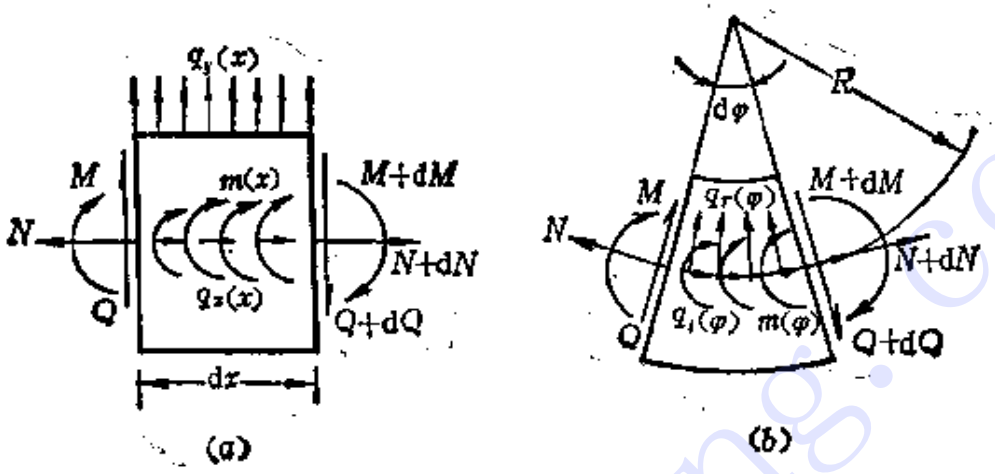
类似地，曲梁微段如图 b，轴线上的载荷有切向载荷 q_t、径向载荷 q_r 和力偶 m，由平衡得

$$\frac{dN}{ds}=-q_t-\frac{Q}{R}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

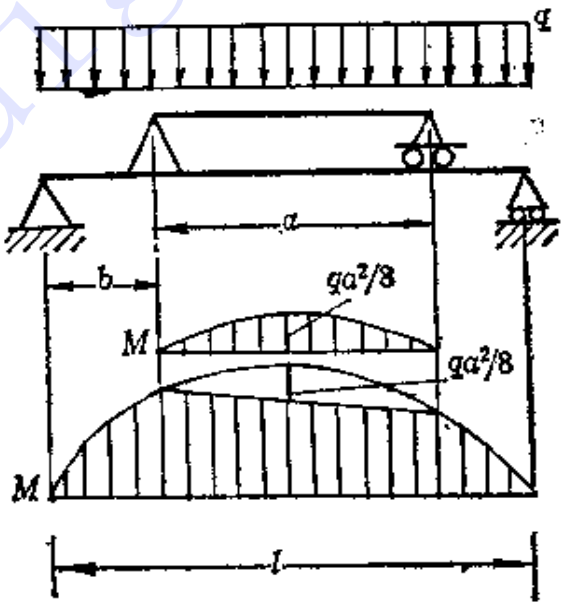
$$\frac{dQ}{ds}=q_r+\frac{N}{R}$$

$$\frac{dM}{ds}=Q+m$$



答 6.10 图

6.13 从图示弯矩图可知，在辅助梁中点处比原始梁在该处的弯矩减小了 $qa^2/8$。



答 6.13 图

6.18 剪力为反对称内力素，弯矩为对称内力素，所以：（1）结构和载荷对称时，Q 图为反对称图形，M 图为对称图形；（2）结构对称而载荷反对称时，则 Q 图对称，M 图反对称；（3）在对称面上，前一情况的 $Q=0$，后一情况的 $M=0$。

*6.20 本题用截面法不难分段作出答案。但为了写出各段通用的统一内力方程，则要借助于单位阶梯函数，即

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

引用

$$H(x-a)=\begin{cases}0 & x<a\\ 1 & x\geqslant a\end{cases}$$

由题6.20图将载荷表示为

$$q(x)=-q_0[H(x-\xi)-H(x-\xi-b)]$$

利用微分关系

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dQ}{dx}=q(x)$$

积分一次，并在每一区段引入一个积分常数，有

$$Q(x)=(-q_0x+C_1)[H(x-\xi)-H(x-\xi-b)] \quad \text{第二段}$$
$$+C_2[H(x)-H(x-\xi)] \quad \text{第一段}$$
$$+C_3[H(x-\xi-b)-H(x-l)] \quad \text{第三段}$$

再积分一次有

$$M(x)=\left(-\frac{q_0x^2}{2}+C_1x+C_4\right)[H(x-\xi)$$
$$-H(x-\xi-b)] \quad \text{第二段}$$
$$+(C_2x+C_5)[H(x)-H(x-\xi)] \quad \text{第一段}$$
$$+(C_3x+C_6)[H(x-\xi-b)-H(x-l)]$$
$$\text{第三段}$$

利用边界条件和内力分段连续条件求各积分常数。由

$$x=\xi,\quad \left.\frac{dM}{dx}\right|_{\xi^-}=\left.\frac{dM}{dx}\right|_{\xi^+}\quad M(\xi^-)=M(\xi^+)$$

$$x=\eta=\xi+b,\quad \left.\frac{dM}{dx}\right|_{\eta^-}=\left.\frac{dM}{dx}\right|_{\eta^+}\quad M(\eta^-)=M(\eta^+)$$

$$x=l,\quad \left.\frac{dM}{dx}\right|_{l^-}=0\qquad M(l^-)=0$$

可求出：

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$C_3=0,\ C_2=q_0b,\ C_1=q_0(\xi+b)$$

$$C_6=0,\ C_4=-\frac{q_0}{2}(\xi+b)^2\quad C_5=-q_0b\left(\xi+\frac{b}{2}\right)$$

于是，在 $x=0$ 处，

$$M(0^+)=C_5=-q_0b\left(\xi+\frac{b}{2}\right)$$

上面各式中符号－、＋表示各 x 位置的左、右。将各积分常数代入上列 $M(x)$ 和 $Q(x)$ 方程得

$$M(x)=\left[-\frac{q_0}{2}x^2+q_0(\xi+b)x-\frac{q_0}{2}(\xi+b)^2\right]\left[H(x-\xi)-H(x-\xi-b)\right]+\left[q_0bx-q_0b\left(\xi+\frac{b}{2}\right)\right]\left[H(x)-H(x-\xi)\right]$$

$$Q(x)=\left[-q_0x+q_0(\xi+b)\right]\left[H(x-\xi)-H(x-\xi-b)\right]+q_0b\left[H(x)-H(x-\xi)\right]$$

6.22　若 R 在某两个集中力之间，则最大弯矩就在这两个集中力之一处。假定最大弯矩在 P_2 处，R 在 P_2 右边，距离为 d，则 P_2 处的弯矩为 $M=R_A(x-d)-P_1a$，由 $\frac{dM}{dx}=0$ 可得 $x=(l+d)/2$。此结果对于最大弯矩在任一集中力处均适用。

6.28　支反力与载荷一起，(a)构成平面平行力系；其他三者均为平面汇交力系。求内力时都应分作两段，并注意截面垂直于轴线（即取横截面）。

*6.31　求支反力后取示力对象如图，由平衡得

$$M(x)=\frac{q}{2}y^2(x)+R_Ax-Hy(x)$$

$$N(x)=R(x)\cos\beta+R_A\sin\beta$$

$$Q(x)=R(x)\sin\beta-R_A\cos\beta$$

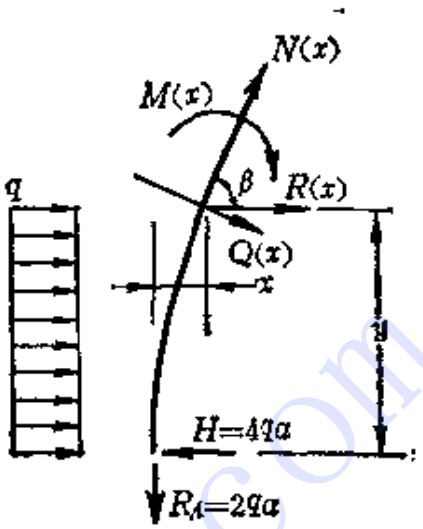
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

其中 $R(x)=H-qy(x)$，β 利用 $\mathrm{tg}\beta=y'(x)$ 确定。

*6.32 利用微分关系 $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=q(x)$ 积分两次，并由边界条件确定其中的积分常数，可得

(a) $M(x)=\frac{q_0l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}$

(b) $M(x)=\frac{q_0l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{q_0l}{\pi}x$



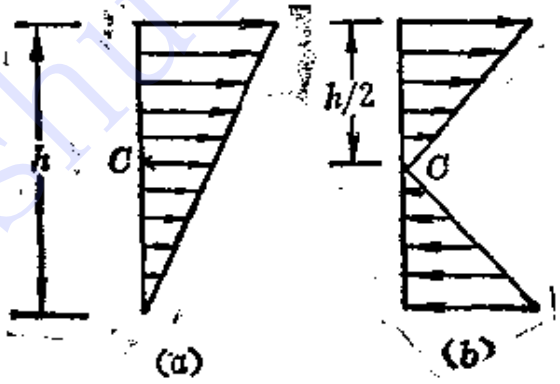
答 6.31 图

6.44 $a=1/9$，$\Delta=a/9\sqrt{2}$。

6.46 因为 $\sigma_{max}=Ed/D$，所以应减小钢丝直径。

6.49 相当于假定正应力在横截面上均匀分布。

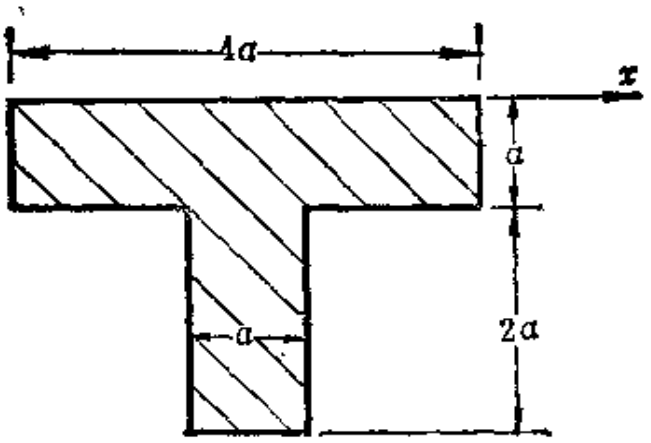
6.50 前后两者分别相当于假定正应力分布如图 a 和 b。



答 6.50 图

6.51 这只适用于中性轴为截面对称轴的情况。至于截面不是对中性轴对称的情况，读者可用图示截面(设中性轴与 x 平行)进行探讨。到1826年纳维才这样改正：当材料服从胡克定律时，中性轴必通过截面的形心。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 6.51 图

*6.56 例如可见文献〔23〕260页，文献〔24〕330-332页或文献〔25〕上册第1版180-184页或第2版228-230页。

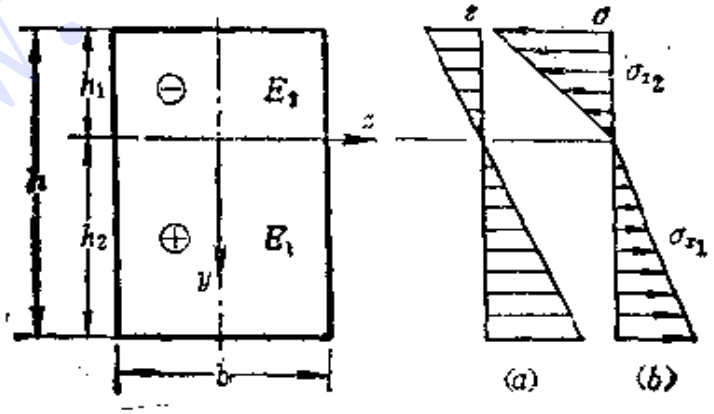
*6.57 $\sigma=\dfrac{(n+2)\ 2^{n+1}}{bh^{n+2}}My^n$

*6.58 例如可见文献〔9〕§5.14，文献〔13〕§6.2(1)，文献〔24〕§5.8。

6.59 设胡克定律和平面假设依然适用，由平衡、几何、物理三方面综合可得图示中性轴位置和应力分布的公式如下($i=1,2$)：

$$h_1=\sqrt{E_2}\,h/\left(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}\right)$$

$$\sigma_{xi}=3E_iMy/b\left(E_1h_1^3+E_2h_2^3\right)$$



答 6.59 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.61 菱形截面剪应力铅垂分量仍可用公式 $\tau = QS/Ib$，其中

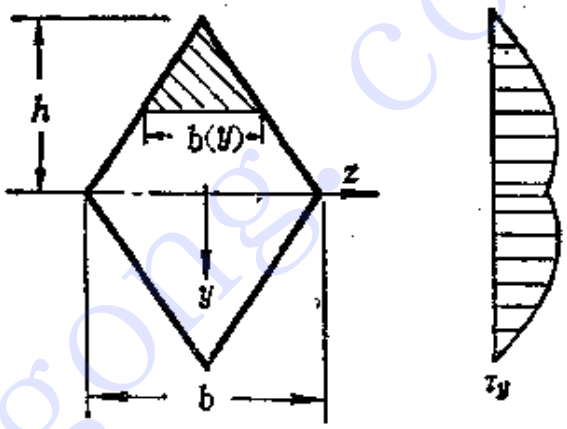
$$S = \frac{b\ (y)}{3}\left(\frac{h^2}{2} + \frac{h}{2}y - y^2\right)$$

由 $\frac{d\tau}{dy} = 0$ 得 $y = \frac{h}{4}$ 处 $\tau_{max} = \frac{9Q}{8bh}$，应力分布如图。亦可见文献〔7〕142页。

*6.62 例如可参见文献〔7〕141-142页。

*6.63 详见文献〔24〕§5.7，亦可参见文献〔4〕§10。

*6.66 仿照横截面有剪力时梁的剪应力公式的推导方法，可知此梁横截面上也有剪应力。其推导过程，例如可参见文献〔22〕题4.13。



答 6.61 图

*6.79 可见文献〔26〕，并可参见文献〔24〕355-357页或文献〔25〕上册第1版234-236页或第2版254-255页。

6.81 例如可见文献〔24〕§8.3。

6.82 (a) 的形心即是弯心。(b) 的剪力在两部分按刚度分配，所以总的剪力作用在 E 大的一部分上，因而弯心离开形心而偏向 E 大的一侧。

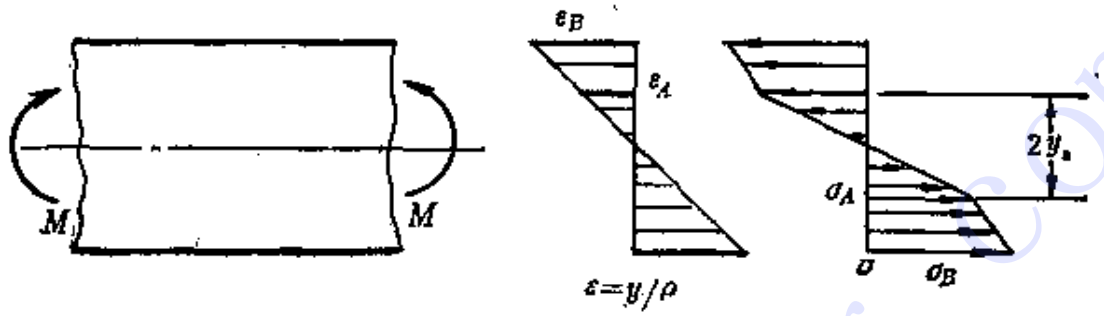
6.89 正应力公式与题6.58的情况相同。并参见文献〔6〕284-285页中习题7.32和7.33及其答案。

*6.92 应变和应力沿高度的分布如图，极限弯矩为

$$M_{ju} = 2\int_0^{h/2} \sigma y b dy$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$= 2\int_0^{y_s} E_A \frac{2\varepsilon_B}{h} y^2 b\mathrm{d}y + 2\int_{y_s}^{h/2} \left[E_A\varepsilon_A + E_B\left(\frac{2\varepsilon_B}{h}y - \varepsilon_A\right)\right] yb\mathrm{d}y$$



答 6.92 图

6.95 原来（a）板处于自然状态，（b）板内存在内应力之故。

6.98 工程上称σ_b/ρ为比强度，E/ρ为比刚度。在比较材料的优劣时，用这两个指标可以知道材料的轻重程度。

6.101 由于 $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=q$，所以对$EIy''=M$取两次导数得$EIy''''=q$。$q$的指向与$y$正向一致时为正，反之为负。

*6.103 （d）$M(B)=y''(B)=0$，$y(B^-)=y(B^+)$，$y'(B^-)+\Delta\theta=y'(B^+)$；（$e$）$M(A)=y''(A)=0$，$EIy'''(A)=ky(A)$；（$f$）$y'(B^-)=y'(B^+)$，$EIy'''(B^+)=ky(B^-)+EIy'''(B^-)$；（$g$）$y(A)=0$，$EIy''(A)=ky'(A)$；（$h$）$y'(A)=y'''(A)=0$。其中$B^-$和$B^+$表示截面$B$的左、右，$k$为弹簧的刚度系数。由于$EIy''=M$，$M'=Q=EIy'''$，所以考查弯矩和剪力时，亦可用$y''$和$y'''$来分析和表示。例如在自由端处，$M=Q=0$，可写成$y'''=y''=0$。

6.105 抛物线是从挠曲线近似微分方程$EIy''=M(x)$求得的，所以与精确解的圆弧线不同。

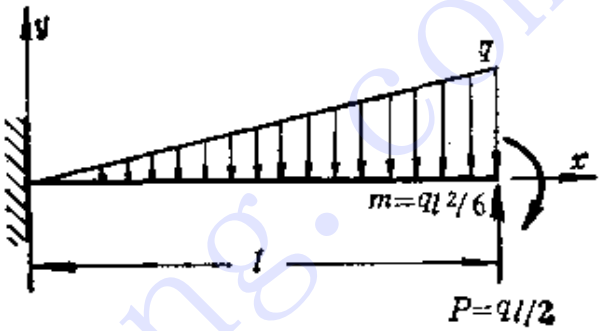
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

6.106 (a) $\theta_A>0$，(b)和(c) $\theta_A<0$。

6.108 这个关系式亦可适用于非弹性或非线性弹性的小挠度梁，因为它是一种几何关系而并未涉及材料性质，但要注意小挠度的条件。

6.112 $1/\rho(x)=$常数，即挠曲线是一圆弧。

6.115 梁的约束和载荷如图所示。



答 6.115 图

6.119 斗拱起到分散集中力的作用。这种设计减轻了梁的负担，其效果类似于题6.118以分布载代替集中载那样。

6.120 可以用二次积分法求解超静定梁，因为它比静定梁能提供更多的边界条件。

*6.122 $\delta=\dfrac{Px^3}{3EI}-\dfrac{qx^4}{8EI}$。

*6.129 对于题6.129图 b，有$M(q\mathrm{d}\xi, x, \xi)$和$y(q\mathrm{d}\xi, x, \xi)$，可将它们分别写成 $M(q, x, \xi)\,\mathrm{d}\xi$和 $y(q, x, \xi)\,\mathrm{d}\xi$。于是，分布载作用区域内任意截面$x$处的弯矩为

$$M(q, x)=\int_{\xi=a}^{x} M(q, x, \xi)\Big|_{x<\xi}\,\mathrm{d}\xi+\int_{x}^{b} M(q, x, \xi)\Big|_{x>\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

同理，x处的挠度为

$$y(q, x)=\int_{a}^{x} y(q, x, \xi)\Big|_{x<\xi}\mathrm{d}\xi+\int_{x}^{b} y(q, x, \xi)\Big|_{x>\xi}\mathrm{d}\xi$$

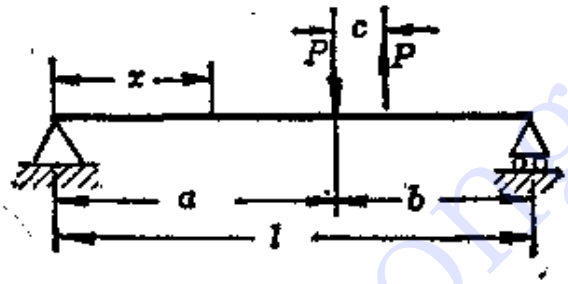
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

对于题6.129图 c，将 m 化为等值反向而靠近的两个力 P，如图所示，则有：

$$M(m,x)=\lim_{c\to 0}\left[M(P,x,a)+M(-P,x,a+c)\right]$$

$$=\frac{x}{l}m$$

$$y(m,\ x)=\lim_{c\to 0}\left[y(P,\ x,\ a)+y(-P,\ x,\ a+c)\right]$$



答 6.129 图

*6.130 $1/\rho=\varepsilon/y=\alpha(T_2-T_1)/h$，$y_{max}=\alpha(T_2-T_1)l^2/2h$。无温度应力。

*6.133 $\varepsilon=ft/l^2$，可以通过等强度梁的挠度 f 而得知梁上、下表面的应变 ε，人们就利用这个关系来标定应变片。

*6.134 例如可见文献〔4〕62-63页，文献〔6〕例题10.12或文献〔27〕题6.2-15。

*6.136 关于梁的大挠度问题，例如可见文献〔24〕§6.12或文献〔28〕§2.12。

*6.141 超静定梁也有它的缺点，例如装配应力、温度应力以及刚度大会使冲击的动载系数增大（可参见后面题11.22），等等。所以工程设计中选用静定梁还是超静定梁，要根据实际情况作全面的考虑。

6.143 将 M 图总面积除以梁的弯曲刚度 EI，反映了两端（设为 A 和 B）的相对转角，即

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\frac{dy}{dx}=\int_l\frac{M\,dx}{EI}=\int_A^B\frac{d\omega}{EI}=\frac{\omega_{AB}}{EI}$$

ω_{AB}为A、B两端之间弯矩图的面积。而$y_{AB}=\int_A^B\frac{x\,d\omega}{EI}$即弯矩图面积对端点的一次矩表示$A$、$B$两端的相对挠度。对于两端固定的梁，$y'=y=0$，所以$\omega_{AB}=y_{AB}=0$。

第七章　组合变形

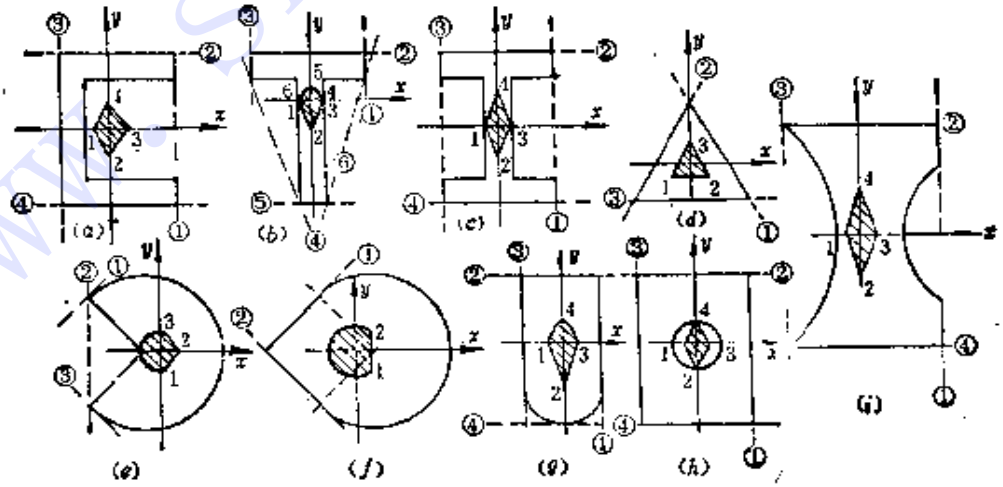
7.8　重合。

7.13　方法相同。

*7.14　对于矩形截面，为半轴等于$ml^2/2EI_z$和$ml^2/2EI_y$的椭圆。

7.17　（1）能测出弯矩，$M=\varepsilon EW/2$；（2）如果将电阻应变片R_A和R_B所在的桥臂，由相邻改为相对，则可测出轴力，$N=\varepsilon EA/2$。其中ε为应变仪读数，W和A分别为抗弯截面系数和截面积，E为弹性模量。

*7.19　关于截面核心问题，例如可见文献〔29〕下册§9.6，文



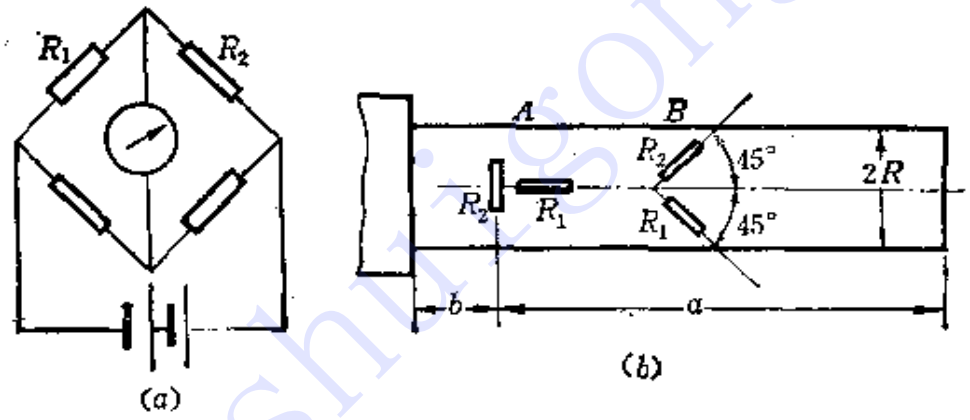
答 7.19 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

献〔30〕下册§15.5，文献〔31〕下册134-139页或文献〔32〕下册258-264页，以及文献〔33〕。题中各截面核心如图。

*7.20 拉伸作用会使薄片的扭转刚度和弯曲刚度增加，测定拉力对于受扭或受弯薄片振动频率的影响（音频变化），即可证实。对于薄片受扭，可见文献〔4〕§53。

7.21 以半桥接法（图a）为例。单独测P时，可在靠近固定端处（图b，为俯视图）上表面纵、横各贴一个应变片（尺寸$b\geqslant 2R$），则有$P=\varepsilon EW/(1+\mu)a$；单独测$m$时，可在杆中央附近上表面处斜贴两个应变片，则有$m=\varepsilon GW_p$。其中$\varepsilon$为应变仪读数，$E$、$\mu$和$G$为弹性常数，$W$和$W_p$为抗弯和抗扭截面系数。



答 7.21 图

*7.22 提示：设$M_y=ax+b$，$M_z=ex+f$。如果$\dfrac{d^2\sqrt{(M_y^2+M_z^2)}}{dx^2}$大于或等于零，则$BC$段合弯矩图不是直线便是上凹曲线。合弯矩$M_b^2=M_y^2+M_z^2$方程可表示成如下形式：

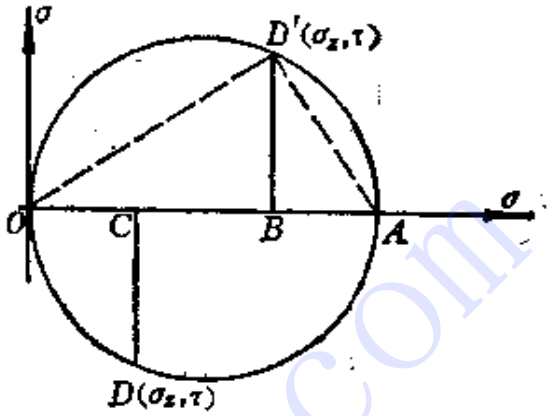
$$\frac{M_b^2}{i^2}-\frac{(x-j)^2}{k^2}=1$$

其中

$$i^2=\frac{(af-be)^2}{a^2+e^2},\quad j=-\frac{ab+ef}{a^2+e^2},\quad k=\frac{(af-be)^2}{(a^2+e^2)^2}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

7.31 从薄壁圆筒外壁任一点取单元体，因为当压应力为零时单元体处于单向拉应力状态，作出应力圆如图。将直径OA三等分，并作垂线交于圆上D和D'点，其中D点表示横截面上的应力，D'点表示径向截面上的应力，连接OD'和$D'A$，由于两三角形OBD'和$O'BA$相似，有$D'B/OB = BA/D'B$，即$\tau/\sigma_x = \sigma_x/\tau$，所以$\sigma_x = \sqrt{2}\,\tau$。



答 7.31 图

第八章 变形能法

*8.3 取大曲率曲杆的一个微段ds，设其横截面上作用有弯矩M和轴力N（不考虑剪力），其中N过形心而中性轴偏离形心的距离为e，于是形心处纤维的伸长为

$$\delta(ds) = \delta(ds)_N + \delta(ds)_M$$

横截面的转角为

$$\delta(d\varphi) = \delta(d\varphi)_M + \delta(d\varphi)_N$$

微段的变形能为

$$dU = \frac{1}{2}M\delta(d\varphi) + \frac{1}{2}N\delta(ds)$$

$$= \frac{1}{2}M\delta(d\varphi)_M + \frac{1}{2}N\delta(ds)_N + \frac{1}{2}N\delta(ds)_M$$

$$+ \frac{1}{2}M\delta(d\varphi)_N$$

其中

$$\delta(d\varphi)_M = \frac{M\,ds}{EAeR}, \qquad \delta(ds)_N = \frac{N\,ds}{EA}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$\delta(\mathrm{d}s)_M = e\delta(\mathrm{d}\varphi)_M, \qquad \delta(\mathrm{d}\varphi)_N = \frac{N\mathrm{d}s}{EAR}$$

R 为曲杆形心轴线的曲率半径，经代入和化简得总变形能为

$$U = \int_s \mathrm{d}U = \int_s \frac{M^2(s)\mathrm{d}s}{2EAeR} + \int_s \frac{N^2(s)\mathrm{d}s}{2EA}$$

$$+ \int_s \frac{M(s)N(s)\mathrm{d}s}{EAR}$$

最后一项是由于大曲率曲杆截面形心轴与中性轴不重合而引起的耦合修正项。

8.4 (a) $\delta = \frac{Pl}{2EA} = \frac{P}{2c}$，即 $P = 2c\delta$，

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}P\delta = c\delta^2, \quad U = \frac{P^2\frac{l}{2}}{2EA} = c\delta^2$$

(b) $\delta = \frac{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}\right)}{EA} = \frac{Pl}{4EA} = \frac{P}{4c}$，即 $P = 4c\delta$，

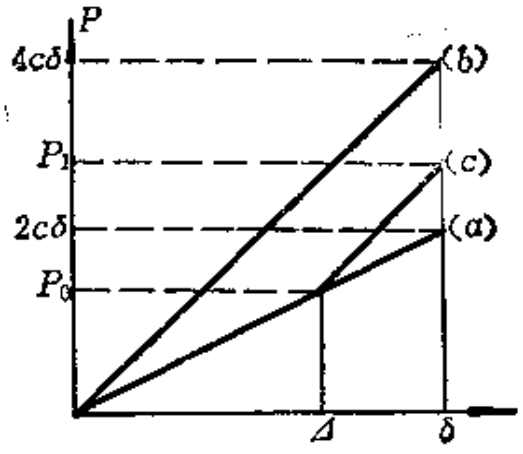
$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}P\delta = 2c\delta^2,$$

$$U = 2\frac{\left(\frac{P}{2}\right)^2\frac{l}{2}}{2EA} = 2c\delta^2$$

(c) $\delta < \Delta$ 与 $\delta > \Delta$ 时 P 规律不同，如图。着力点位移为 $\delta > \Delta$ 时 $P = P_1$，且

$$P_1 = P_0 + 4c(\delta - \Delta)$$

其中 $P_0 = 2c\Delta$，于是



答 8.4 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$W = U = \frac{1}{2} P_0 \Delta + P_0(\delta - \Delta) + \frac{1}{2}(P_1 - P_0)(\delta - \Delta)$$

$$= \frac{1}{2} P_0 \delta + \frac{1}{2} P_1 \delta - \frac{1}{2} P_1 \Delta$$

$$= c\Delta^2 + 2c\delta^2 - 2c\Delta\delta$$

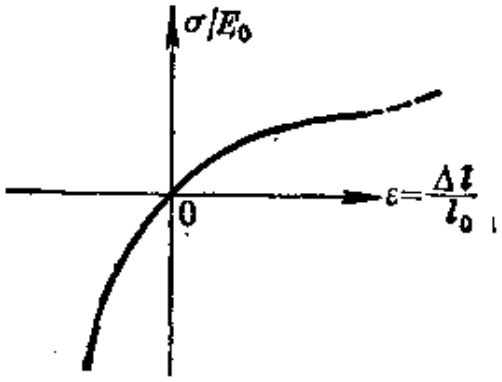
8.10 以节点作为示力对象，但不能以未变形时水平位置 B 而只能以变形后的位置 B' 来列写平衡方程，这时两杆的轴力 $N = P/2\sin\theta = Pl/2\Delta$，而杆的伸长 $\Delta l = Nl/EA = \sqrt{l^2 + \Delta^2} - l^2 \approx \Delta^2/2l$，所以 $P(\Delta) = EA(\Delta/l)^3$，于是变形能为

$$U = \int_0^{\Delta} P(\Delta)\mathrm{d}\Delta = \frac{EA\Delta^4}{4l^3}$$

这是一个典型的几何非线性问题。

8.11 在拉伸或压缩下，橡胶的非线性弹性应力应变曲线如图所示。由于标距内试件处于均匀应力场，而且材料是不可压缩的，所以储存的变形能为

$$U = u(\varepsilon)V_0 = u(\varepsilon)\frac{\pi d_0^2 l_0}{4}$$



答 8.11 图

其中

$$u(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$$

$$= \frac{E_0}{3}\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

或

$$U = \frac{\pi}{24} E_0 d_0^2 \frac{1}{l_0} (\Delta l)^2 \frac{3l_0 + \Delta l}{l_0 + \Delta l}$$

这是一个材料非线性的问题。

8.13 (a) $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$; (b) 梁变形前的轴线与挠曲线之间

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

所包围的面积。

8.15　利用功的互等定理即可。

*8.16　设弹性体在一对力P作用时为状态Ⅰ，同一弹性体在均布压力q作用时为状态Ⅱ，则由功的互等定理有

$$P\Delta l_q = q\Delta V_p$$

由于状态Ⅱ中任一点的三个主应力都等于q，所以

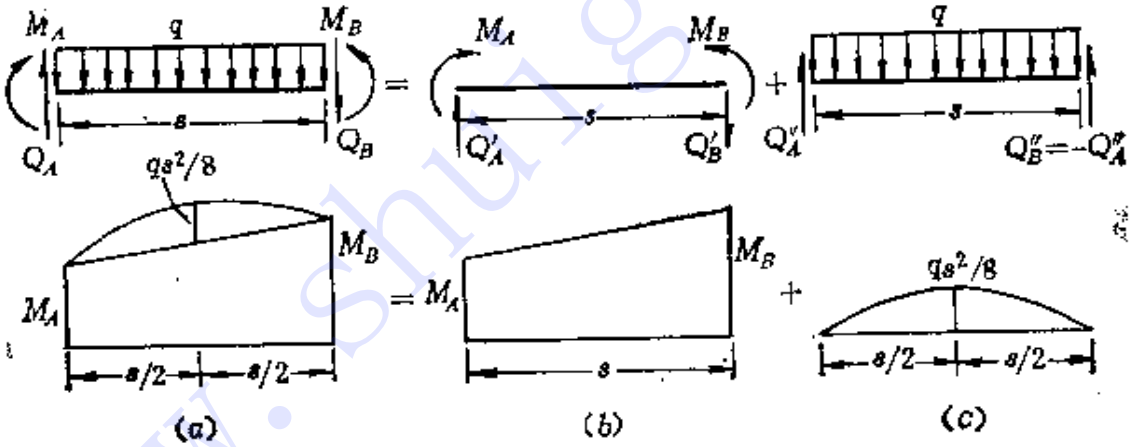
$$\Delta l_q = \varepsilon l = \left[\frac{q}{E} - \mu\left(\frac{q}{E} + \frac{q}{E}\right)\right]$$

由上两式可得体积变化

$$\Delta V_p = P_1(1 - 2\mu)/E$$

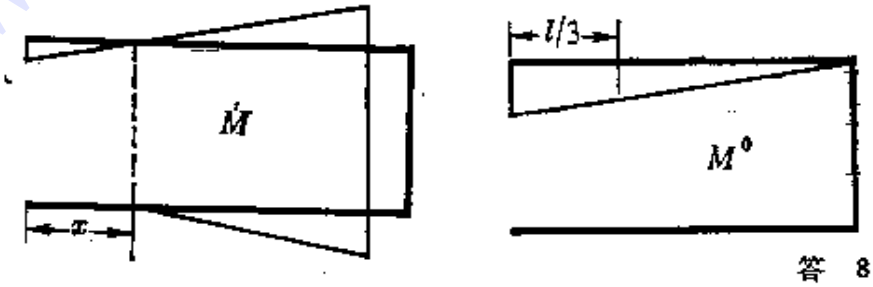
此式提供了从体积变化来测定泊松比μ的办法。

8.22　从梁上任取一仅受均布载的梁段s，如图a。利用叠加原理可知图c梁段的受力情况相当于简支梁受均布载作用，因而中点最大弯矩为$qs^2/8$。



答　8.22　图

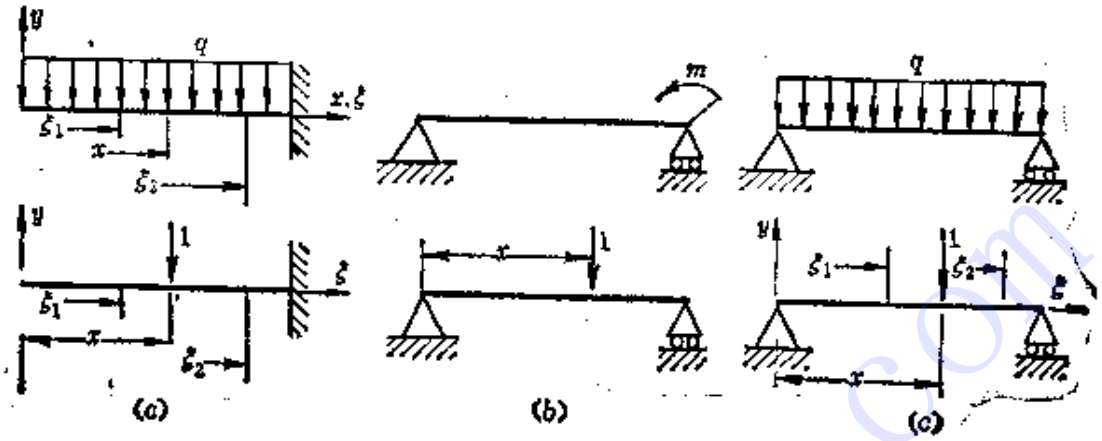
8.23　从M和M^0图可知$x = l/3$。



答　8.23　图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

8.27 取坐标如图，三根梁的挠曲线方程可得如下：



答 8.27 图

(a) $0 \leqslant \xi_1 \leqslant x$, $M(\xi_1) = -\frac{1}{2}q\xi_1^2$, $M^0(\xi_1) = 0$

$x \leqslant \xi_2 \leqslant l$, $M(\xi_2) = -\frac{1}{2}q\xi_2^2$, $M^0(\xi_2) = -(\xi_2 - x)$

$$EIy = \int_o^x 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}q\xi_1^2\right) \mathrm{d}\xi_1 + \int_x^{l} -\left(\xi_2 - x\right)\left(-\frac{1}{2}q\xi_2^2\right)\mathrm{d}\xi_2$$

$$= \frac{q}{24}\left(x^4 - 4l^3x + 3l^4\right)$$

(b) 采用图乘法

$$EIy = \omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 = \frac{ml^2}{6}(\xi - \xi^3)$$

其中

$$m_1 = \frac{2}{3}\xi m, \quad m_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\xi\right)m, \quad \xi = \frac{x}{l}$$

$$\omega_1 = \frac{x^2(l-x)}{2l}, \quad \omega_2 = \frac{x(l-x)^2}{2l}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

(c) $0 \leqslant \xi_1 \leqslant x$, $M(\xi_1)=\frac{ql}{2}\xi_1-\frac{q}{2}\xi_1^2$, $M^0(\xi_1)=\frac{l-x}{l}\xi_1$

$$x \leqslant \xi_2 \leqslant l,\quad M(\xi_2)=\frac{ql}{2}\xi_2-\frac{q}{2}\xi_2^2,$$

$$M^0(\xi_2)=\frac{x}{l}(l-\xi_2)$$

$$EIy=\int_{\xi_1=0}^{x} M(\xi_1)M^0(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1+\int_{\xi_1=x}^{l} M(\xi_2)M^0(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2$$

$$=\frac{ql^4}{24}(\eta-2\eta^3+\eta^4)\text{，其中}\eta=x/l$$

*8.29 如果已经求出梁的挠曲线方程，则可用积分的方法求出变形前、后轴线之间所围的面积。但当梁上作用的载荷较为复杂时，这样计算并不简便。若在全梁上加单位均布载荷 $q=1$，其所引起的弯矩为 M_q^0，实际载荷所引起的弯矩为 M，则这个面积可用下式计算

$$A=\int_l \frac{MM^0_q\mathrm{d}x}{EI}$$

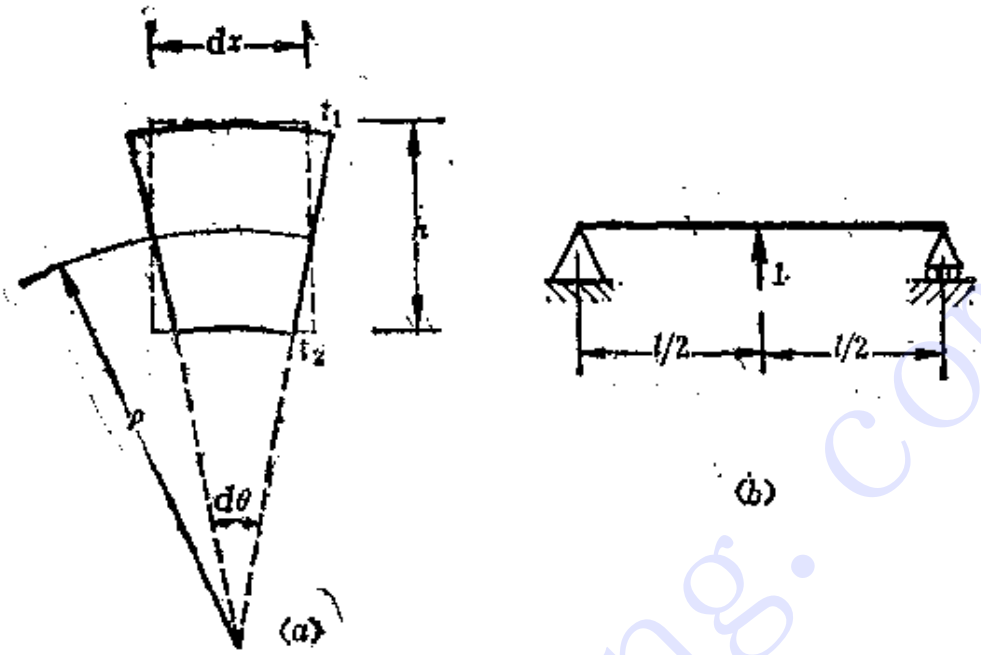
其推导可见文献〔22〕77-78页。

*8.30 可利用上题的公式，由于圆环在单位均布载荷作用下 $M_q^0\equiv 0$，所以圆环变形前后的面积不变。

8.32 使 A 点垂直于力 P 方向的位移等于零，就可以建立有关 α 的三角方程。

*8.33 （1）用截面法求出直杆的轴力 $N=P$，所以它的伸长为 Pa/EA。因为曲杆为刚体，$AB\equiv\sqrt{2}\,a$，由几何分析得出 A 点铅垂位移等于直杆的伸长。（2）可用莫尔积分，答案为 $\frac{Pa}{EA}+3(\pi+1)\frac{Pa^3}{EI}$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 8.34 图

8.34 设梁的原有温度为 t_0，温度变化后梁的轴线的曲率半径为 ρ。取梁的微段如图 a，温度变化后其上、下表面的长度之差为

$$\left(\rho+\frac{h}{2}\right)\mathrm{d}\theta-\left(\rho-\frac{h}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}x[1+(t_1-t_0)\alpha]-\mathrm{d}x[1+(t_2-t_0)\alpha]$$

$$\therefore\quad\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{(t_1-t_2)\alpha}{h}$$

$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$相当于单位载荷法的积分式中的$M/EI$，在欲求位移处加一单位力，即可求得位移如下

$$\Delta=\int_l\frac{MM^0\mathrm{d}x}{EI}=\int_l M^0\mathrm{d}\theta=\frac{(t_1-t_2)\ \alpha}{h}\int_l M^0\mathrm{d}x$$

将单位力加在梁的中点如图b，显然M^0将作正功，于是梁中点的挠度为

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

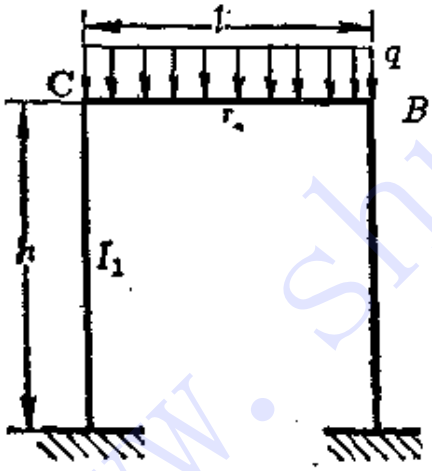
$$\Delta=\frac{(t_1-t_2)\alpha}{h}\cdot 2\int_0^{l/2}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x=\frac{(t_1-t_2)\alpha l^2}{8h}\qquad(\uparrow)$$

第九章　超静定体系

9.3　(a) 12次，(b) 4次，(c) 9次。

*9.12　这里给出的$ql^2/12$和0分别代表横梁两端刚性固定和两端简支的极限情况。对于图示一般情况，可求得

$$M_C=M_B=\frac{ql^2}{6}\cdot\frac{1}{2+\dfrac{I_2+h}{I_1 l}}$$



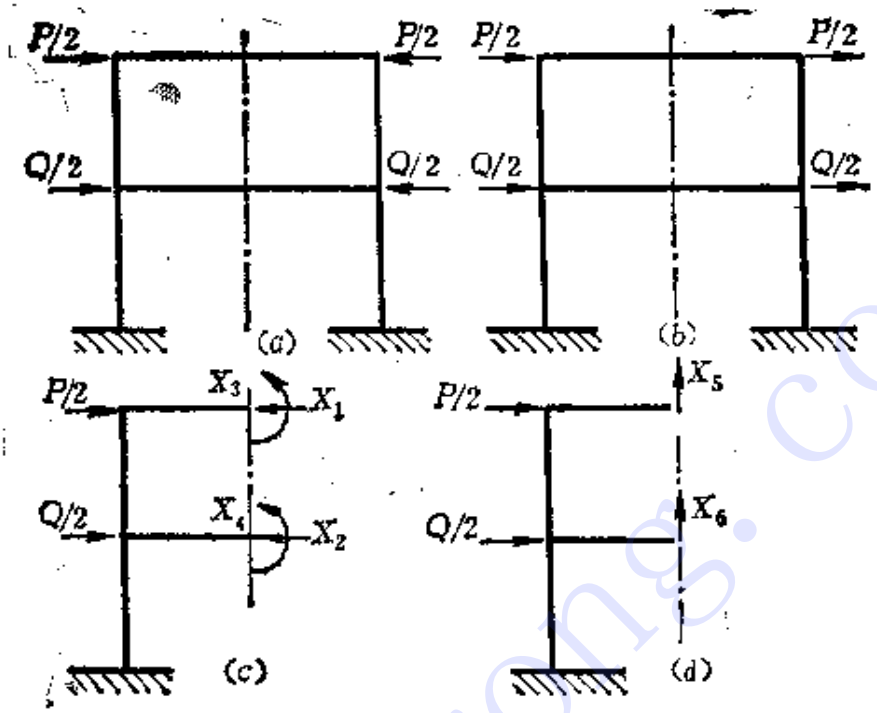
答 9.12 图

由于(a)和(b)两种情况中立柱与横梁的相对刚度没有变化，所以由上式(令$h=l$)可得C处的弯矩均为$ql^2/18$。由上式可以排出所列的次序。亦可从比较各横梁两端约束程度(即立柱刚度)而定性排出这种次序。

9.13　在超静定结构中，未知力的数目大于独立的静力平衡方程的数目，所以有无穷多组满足平衡方程的可能解答，而只有既满足平衡方程又满足变形协调条件的解，才是问题的真正解答。

9.15　这是一个六次超静定问题。利用叠加原理把非对称的载荷分解为对称的和反对称的两组，如图a和b所示。然后利用对称性从中间切开，如图c和d，就变为求解一个四次超静定问题和一个二次超静定问题，因而简化了计算。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



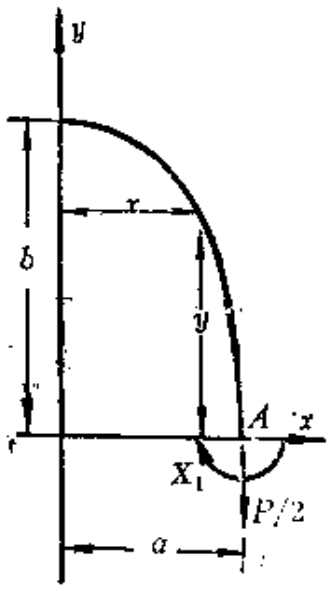
答 9.15 图

9.16 (c) 管所受载荷对于相隔$2\pi/3$的直径轴对称，在对称面上$Q_A = Q_B = 0$，变为一次超静定问题。如果仔细分析圆环变形后挠曲线的形状，就会发现可以利用AB弧中点是拐点（$M = 0$）的特征使问题进一步简化。对于类似的循环对称的圆环，利用这种变形曲线对称和反弯的特征，可以使计算大为简化。

*9.22 四种情况都是有双对称轴的闭合环形结构，利用对称性可变为一次超静定问题。取1/4环为基本体系，$M_A = X_1$为多余约束力，见图，则力法方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

其中



答 9.22 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$EI\Delta_{1P}=\int_0^s M_P M^0 ds=\frac{P}{2}\left(a\int_0^s ds-\int_0^s x ds\right)$$

$$=\frac{P}{2}s(a-x_c)$$

$$EI\delta_{11}=\int_0^s M^0 M^0 ds=s$$

上两式中，$s=\int_0^s ds$，$x_c=S_y/s=\int_0^s x ds/s$，于是解出

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{P}{2}(x_c-a)$$

$$M_P(x)=\frac{P}{2}(a-x)+X_1=\frac{P}{2}(x_c-x)$$

在基本体系上过A点沿负x方向加单位力，则$M^0=y$且

$$EI\Delta a=\int_0^s M_P(x)M^0 ds=\frac{P}{2}(x_c S_x-I_{xy})$$

其中

$$S_x=\int_0^s y ds=y_c s,\quad I_{xy}=\int_0^s xy ds$$

利用平行移轴定理$I_{xy}=I_{x_0y_0}+x_c y_c s$，可把上式简化为

$$\Delta a=-\frac{P}{2EI}I_{x_0y_0}$$

这里x_0，y_0为过1/4弧段形心的坐标轴。以情况(b)为算例，有$x_c=y_c=a/2$，直线AB的方程为$x_0=-y_0$（对于其形心的坐标轴x_0，y_0），则$ds=\sqrt{2}\,dx_0=\sqrt{2}\,dy_0$，

$$I_{x_cy_0}=\int_0^s x_0 y_0 ds=-\int_{-a/2}^{a/2} x_0^2\sqrt{2}\,dx_0=-\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\therefore\quad \Delta a=\frac{\sqrt{2}Pa^3}{24EI}$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

在情况（c）中，$s=R\alpha$，$x=R(\cos\varphi-\cos\alpha)$，$y=R\sin\varphi$，$a=R(1-\cos\alpha)$，于是

$$S_y=\int_0^s x\mathrm{d}s=R^2(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$$

$$S_x=\int_0^s y\mathrm{d}s=R^2(1-\cos\alpha)$$

$$I_{xy}=\int_0^s xy\mathrm{d}s=\frac{R^3}{2}(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)$$

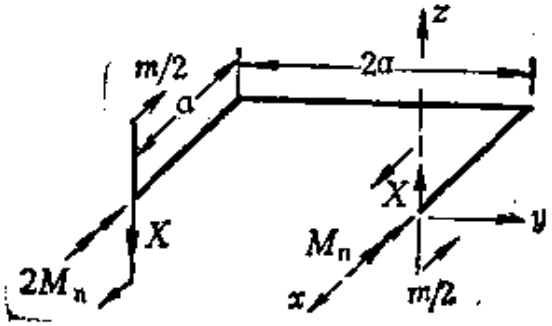
$$x_c=\frac{S_y}{s}=\frac{R}{\alpha}(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$$

$$\Delta a=\frac{P}{2EI}(x_cS_x-I_{xy})$$

$$=\frac{PR^3}{2EI}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\frac{\sin2\alpha}{2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

在曲杆计算中，引入比拟的曲线几何性质s、S_x、S_y、I_x、I_y和I_{xy}等，是简化计算和使方法一般化的有用工具。

9.24　（a）取基本体系如图，m在垂直于结构的平面内，所以截面上$N=Q_y=M_x=0$；由变形反对称使$M_y=0$；而$2M_n=Q_x2a$，令$Q_x=X$，成为一次超静定问题。



答 9.24 图

9.23　可在形式上写成统一的$\delta_{11}X+\Delta_{1d}=0$，但各基本体

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

系的δ_{11}和$\Delta_{1\Delta}$不同，如下：

	(b)	(c)	(d)
$\Delta_{1\Delta}$	Δ	$\frac{l_1+l_2}{l_1}\Delta$	$\frac{\Delta}{l_1}+\frac{\Delta}{l_2}$
$EI\delta_{11}$	$\frac{l_1^2 l_2^2}{3(l_1+l_2)}$	$\frac{l_2^2}{3}(l_1+l_2)$	$\frac{l_1+l_2}{3}$

*9.27 $$X_i\delta_{ij}+\Delta_{iP}+\Delta_{it}+\Delta_{i\Delta}=0 \qquad (a)$$

其中重复下标表示求和，而且

$$\delta_{ij}=\sum_k\int_{s_k}\frac{M^0_{ki}M^0_{kj}}{E_kI_k}\mathrm{d}s,\quad \Delta_{iP}=\sum_k\int_{s_k}\frac{M^0_{ki}M_{kP}}{E_kI_k}\mathrm{d}s$$

$$\Delta_{it}=\sum_k\left[\pm\frac{\alpha_k(t_{1k}+t_{2k})}{2}\int_{s_k}N^0_{ki}\mathrm{d}s \pm\frac{\alpha_k(t_{1k}-t_{2k})}{h_k}\int_{s_k}M^0_{ki}\mathrm{d}s\right]$$

X_i为多余约束力，$\Delta_{i\Delta}$为基本体系支座沉陷Δ在X_i方向所造成的机动位移，M^0_{ki}和N^0_{ki}为单位力$X_i=1$在基本体系的s_k杆内所引起的弯矩和轴力，M^0_{kj}为单位力$X_j=1$在基本体系的s_k杆内所引起的弯矩，M_{kP}为实际载荷在基本体系的s_k杆内所引起的弯矩，α_k、h_k、E_k、I_k、t_{1k}和t_{2k}，分别为s_k杆的线膨胀系数、横截面高度、弹性模量、惯矩和此杆上、下两边的温度（这里假定了温度场沿杆轴方向均匀、而沿杆截面高度线性变化），

$\frac{\alpha_k(t_{1k}+t_{2k})}{2}\mathrm{d}s$为杆的微段的热伸缩变形$\mathrm{d}\Delta l_t$，

$\frac{\alpha_k(t_{1k}-t_{2k})}{h_k}\mathrm{d}s$为高度$h_k$两边温差所引起杆段两横截面的相对转角$\mathrm{d}\theta_t$。可以把式（$a$）看成是虚位移方程。正负号则根据$M^0_{ki}$和$N^0_{ki}$对相应的温度变形作正功还是作负功来确定。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*9.32 三弯矩方程实际上表示第i号支座左、右的转角相等$\theta_i' = \theta_i''$，即在支座上挠曲线是光滑的。其中

$$\theta_i' = \theta_i'(M_{i-1}) + \theta_i'(M_i) + \theta_i'(f_i, f_{i-1}) + \theta_i'(P_i) \qquad (a)$$

$$\theta_i'' = \theta_i''(M_i) + \theta_i''(M_{i+1}) + \theta_i''(f_i, f_{i+1}) + \theta_i''(P_{i+1}) \qquad (b)$$

显然只涉及到相邻近的三个弯矩M_{i-1}，M_i和M_{i+1}。这里f_{i-1}，f_i和f_{i+1}表示第$i-1$，i和$i+1$三个支座相对于同一水准线可能具有不同的支座沉陷量，从而引起附加的转角$\theta_i'(f_i, f_{i-1})$和$\theta_i''(f_i, f_{i+1})$。如果各支座为独立的弹性支座，其沉陷量$f_i = R_i/k_i$，这里R_i为相邻两跨在第i号支座上引起的反力，

$$R_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + R_i(P_i) + R_i(P_{i+1})$$

$$= R_i(M_{i-1}, M_i, M_{i+1})$$

可见f_i与M_{i-1}，M_i和M_{i+1}有关，f_{i-1}与M_{i-2}，M_{i-1}和M_i有关，f_{i+1}与M_i，M_{i+1}和M_{i+2}有关。把f_i，f_{i-1}和f_{i+1}代入式(a)和(b)，就可看出弹性支座上连续梁的基本方程是涉及到M_{i-2}，M_{i-1}，M_i，M_{i+1}和M_{i+2}的五弯矩方程。

*9.33 设把第i号支座换成中间铰，则三弯矩方程中对应的$M_i = 0$，但此时中间铰左、右的挠曲线不光滑，即$\theta_i' \neq \theta_i''$。应代之以$X_i' = X_i'' = X_i$，$X_i$是中间铰处的剪力，而且

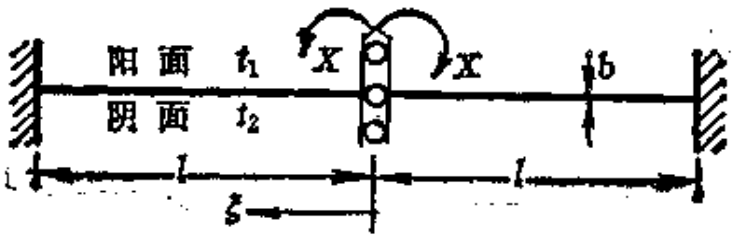
$$X_i' = \frac{M_{i-1}}{l_i} + R_i'(P_i), \qquad X_i'' = \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} + R_i''(P_{i+1})$$

这里$R_i'(P_i)$和$R_i''(P_{i+1})$分别是基本体系上，第i跨载荷P_i和第$i+1$跨载荷P_{i+1}在i铰上所引起的反力。只要对第i个方程作出以上代换，就可应用三弯矩方程来求解带有中间铰的连续梁。

*9.35 由于对接点预留伸缩缝，可以沿轴向自由地热胀冷缩，所以不会造成轴向热应力。对齐条件为两半桥热弯曲的相对转角为零。取节点热弯矩X为多余约束力，日光侧照时计算模型的俯视图如图所示。正则方程为

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1t} = 0$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 9.35 图

其中

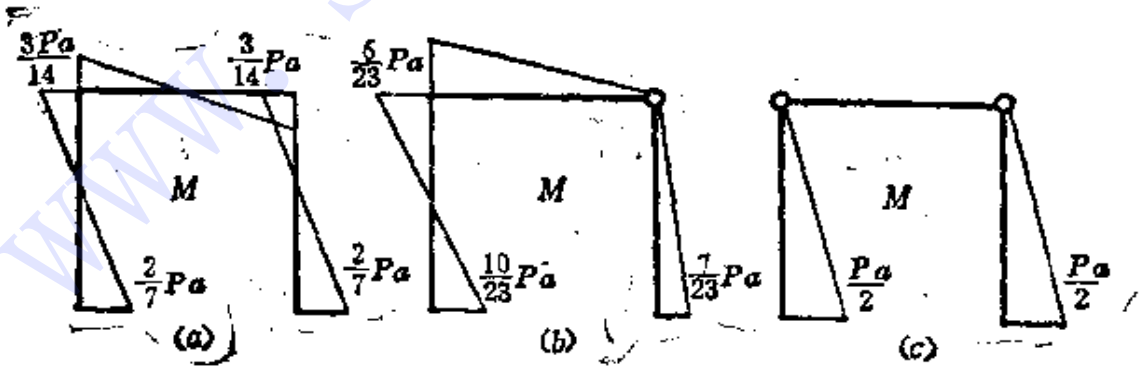
$$\delta_{11}=\int_o^l \frac{1\times 1\,d\xi}{Eb^3h(\xi)/12}=\frac{12}{Eb^3}\int_o^l h^{-1}(\xi)d\xi$$

$$\Delta_{1t}=\frac{\alpha(t_1-t_2)}{b}\int_o^l 1dx=\frac{\alpha\Delta tl}{b}$$

$$\therefore X_1=-Eb^2\alpha\Delta tl/12I,\quad I=\int_o^l h^{-1}(\xi)d\xi$$

其中$h(\xi)$为桥的高度，b为桥宽，E为桥的相当弹性模量（可用能量相当法求出），α为桥的相当线膨胀系数。如果日光照射在桥身的顶面，读者可分析其计算模型。

9.36 可得三个结构的弯矩图如图。

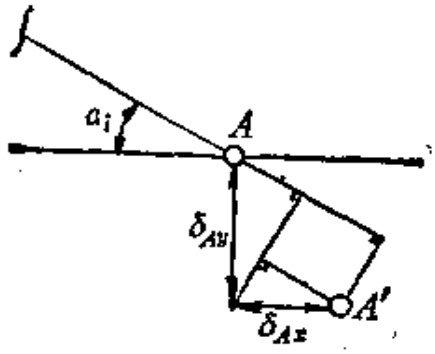


答 9.36 图

9.37 BC杆受压，压力大小为$11P/285$。

*9.38 设第i根杆与水平轴的夹角为α_i，如图，则其伸长量

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 9.38 图

为 $$\Delta l_i=\delta_{Ay}\sin\alpha_i+\delta_{Ax}\cos\alpha_i=\frac{N_i l_i}{E_i A_i}$$

记$c_i=E_iA_i/l_i$为i杆的拉伸刚度，由上式得

$$N_i=c_i\delta_{Ay}\sin\alpha_i+c_i\delta_{Ax}\cos\alpha_i \qquad (a)$$

将式（a）代入下列平衡方程

$$\sum_{i=1}^{n}N_i\cos\alpha_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{n}N_i\sin\alpha_i=P \qquad (b)$$

解出δ_{Ay}和δ_{Ax}，再代入式（a）即可求得N_i。

*9.39 i杆内力$N_i=c_i\Delta l_i$，其中$c_i=E_iA_i/l_i$，$\Delta l_i=w+\theta_x y_i+\theta_y x_i$。由平衡条件得

$$\left.\begin{aligned}P&=\Sigma N_i=\Sigma c_i(w+\theta_x y_i+\theta_y x_i)\\ Py_P&=\Sigma N_i y_i=\Sigma c_i(wy_i+\theta_x y_i^2+\theta_y x_i y_i)\\ Px_P&=\Sigma N_i x_i=\Sigma c_i(wx_i+\theta_x y_i x_i+\theta_y x_i^2)\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

引入符号$C=\Sigma c_i$，$S_x=\Sigma c_i y_i$，$S_y=\Sigma c_i x_i$，$I_x=\Sigma c_i y_i^2$，$I_y=\Sigma c_i x_i^2$，$I_{xy}=\Sigma c_i x_i y_i$，把式（$a$）改写成

$$\left.\begin{aligned}P&=wC+\theta_x S_x+\theta_y S_y\\ Py_P&=wS_x+\theta_x I_x+\theta_y I_{xy}\\ Px_P&=wS_y+\theta_x I_{xy}+\theta_y I_y\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

由式（b）求出w，θ_x和θ_y后，可得

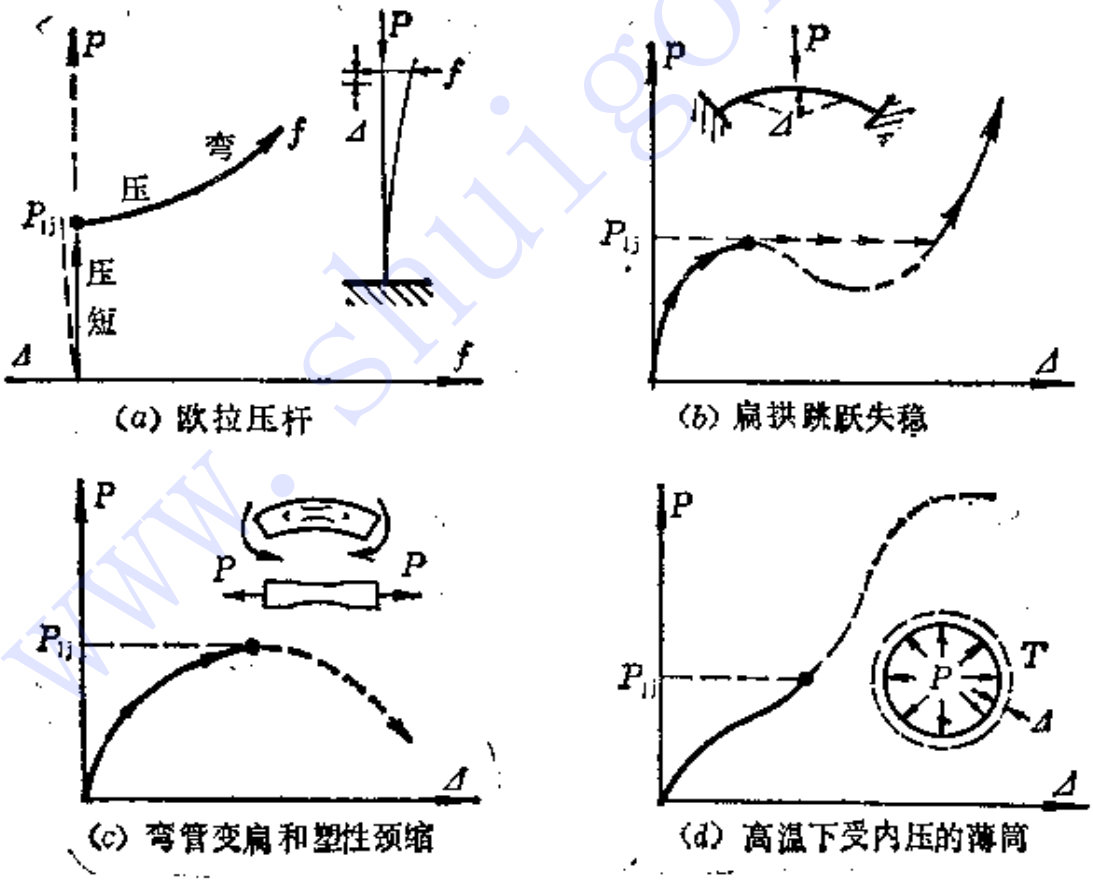
$$N_i=c_i(w+\theta_x y_i+\theta_y x_i)$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*9.40 例如可见文献[28]§5.13，文献[29]下册225—226页，或文献[31]下册100—101页。

第十章 压杆稳定和梁柱（纵横弯曲）

*10.4 可以从静力平衡观点、动力扰动观点和能量观点来描述失稳现象。平衡观点又有两种情况，即载荷P与位移Δ的关系曲线产生分支或多值化，如图a和b所示；或当P增加时斜率$\frac{dP}{d\Delta}$减小，或者当P增加dP后$d\Delta$无限增大，如图c和d所示。各图中实线表示稳定平衡状态，虚线表示可能的不稳定平衡状态。材料力学中一般只研究使压杆失稳的欧拉分支载荷。从能量观点描述，可研究系统总势能$\Pi(q)$和由平衡位置算起的控制参数（虚



(a) 欧拉压杆　(b) 扁拱跳跃失稳

(c) 弯管变扁和塑性预缩　(d) 高温下受内压的薄筒

答 10.4 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

位移δq）所产生的总势能变化$\Delta\Pi=\Pi(q+\delta q)-\Pi(q)$，通过台劳展开

$$\Delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial q}\delta q+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\delta q^2+0(\delta^3)$$

平衡条件用$\frac{\partial\Pi}{\partial q}=0$来表示。稳定平衡时$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}>0$，$\Pi$极小；不稳定平衡时$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}<0$，$\Pi$极大；而$\frac{\partial_2\Pi}{\partial q^2}=0$表示对应于临界载荷的随遇平衡状态。从动力观点描述，当系统受到微小扰动之后，稳定平衡时系统围绕平衡位置振动，不稳定时则系统的变形不断增长，不能恢复平衡而周期趋向无穷大。对于有耗散的非保守系统，静力平衡和能量判据都不再适用。

10.6　有时将拉伸中出现的颈缩现象叫做塑性失稳现象。例如可见文献〔34〕320页。

10.11　例如可见文献〔28〕251页。

*10.12　例如可见文献〔2〕例题14.3。

*10.13　(a) $M(x)=P(\delta-v)$, $v(0)=0$, $v'(0)=\varphi_0=P\delta\overline{\varphi}$, $v(l)=\delta$, $v''(l)=0$；(b) $M(x)=-Pv+Q(l-x)$, $v(0)=0$, $v'(0)=Ql\,\overline{\varphi}$〔$Q=EIv'''(l)$〕, $v(l)=0$, $v''(l)=0$；(c) $M(x)=-Pv+EIv''(l)$, $v(0)=0$, $v'(0)=EIv''(0)\overline{\varphi}$, $v(l)=0$, $v'(l)=EIv''(l)\,\overline{\varphi}$。

*10.23　对于情况（1），设$\mu=1$，读者可从下列计算结果和比较得出结论（只考虑细长杆即弹性稳定问题）。

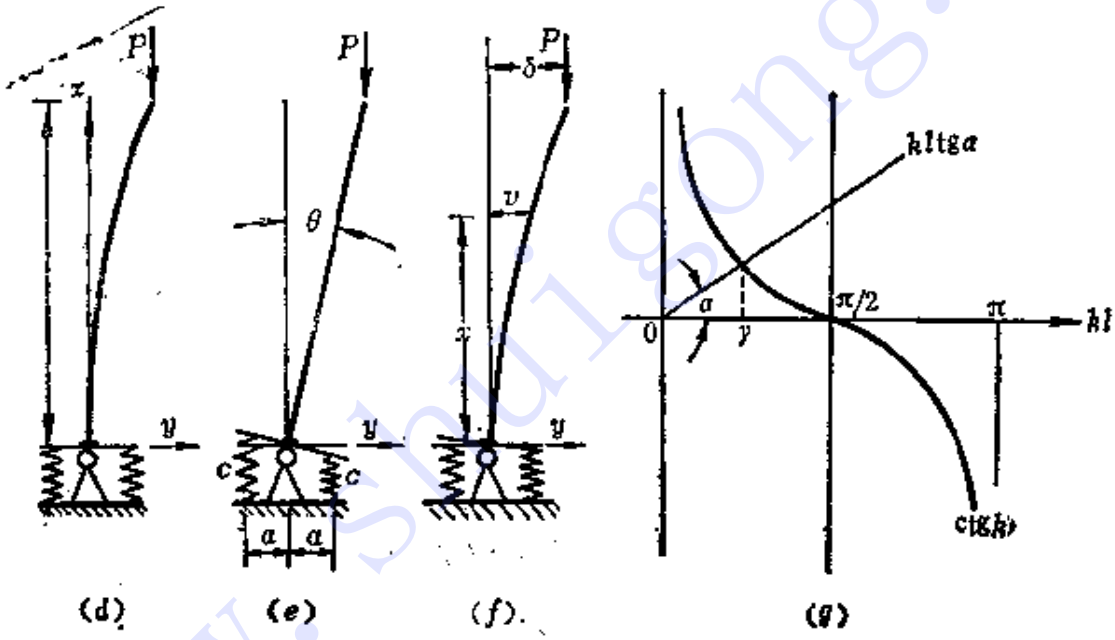
	第一根压杆	第二根压杆	比　　较
P_{lj}	$\frac{\pi^2E}{l^2}\frac{\pi(D^4-d_1^4)}{64}$	$\frac{\pi^2E}{l^2}\frac{\pi(D^4-d_2^4)}{64}$	$P_{lj_1}>P_{lj_2}$
λ	$\frac{4l}{(D^2+d_1^2)^{1/2}}$	$\frac{4l}{(D^2+d_2^2)^{1/2}}$	$\lambda_1>\lambda_2$
σ_{lj}	$\frac{\pi^2E}{l^2}\frac{(D^2+d_1^2)}{16}$	$\frac{\pi^2E}{l^2}\frac{(D^2+d_2^2)}{16}$	$\sigma_{lj_1}<\sigma_{lj_2}$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

10.24　例如可见文献〔35〕654—655页。

10.37　文献〔50〕讨论了有关的问题，可参阅。

*10.36　情况（a）有图示三种可能的失稳模态：图d表示弹性地基的刚度远大于压杆刚度，因而可作为刚性固定端处理，即与情况(b)相同，$P_{lj}=\pi^2EI/4l^2$；图e表示地基的刚度远小于压杆刚度，因而压杆可能刚性倾斜，$P_{lj}=2ca^2/l$，设$c=k_1EI/a^3$，$l=k_2a$，则得$P_{lj}=\pi^2EI/(\mu l)^2$，其中$\mu=\pi/(2k_1k_2)^{1/2}$，a表示地基刚性的两个等效弹簧（刚度为c）的作用点。适当选择k_1和k_2，可能使$\mu>2$；图f表示地基的刚度与压杆的刚度同级，此时纵弯曲微分方程为



答 10.36 图

$$EIv''=P(\delta-v)$$

其解为（记$k^2=P/EI$）

$$v=\delta+A\cos kx+B\sin kx$$

边界条件如下：

$$v(0)=0,v'(0)=P\delta\overline{\varphi},\quad v(l)=\delta$$

这里$1/\overline{\varphi}$为弹性地基的转动刚度。特征方程为（见图g）

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$kl\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}kl$，（其中 $\mathrm{tg}\alpha = \overline{EI\varphi}/l$）

解在$kl=\gamma$处，且$\gamma<\pi/2$，因而$P_{lj}<\pi^2EI/4l^2$。

对于情况（c）的千斤顶，底座会使丝杆的临界力小于刚性固定端的情况（b），属于上述图 f 的类型。

10.37 采用计算模型（b），会把临界力估计偏高而引起危险。一般作动筒l_2较长，采用计算模型（c）作为变截面杆处理较为合理。其求解临界力的方法可用静力法（例如可见文献〔4〕140—141页）或能量法（例如可见文献[28]219—220页）。

*10.38 可见文献[36]192页。

*10.40 为了讨论局部削弱对临界力的影响，其计算模型如图。可以证明

$$P_{lj}=\frac{\pi^2EI}{l^2}(1-\beta)$$

其中

$$\beta=\frac{\Delta I}{I}\left[\frac{a}{l}-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi(a-2c)}{l}\sin\frac{\pi a}{l}\right]$$

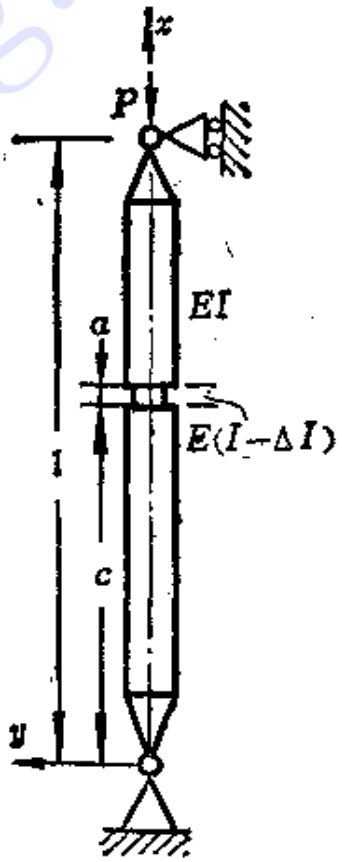
若$a\ll l$，则$\beta=\frac{2\Delta I}{I}\frac{a}{l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}c\right)$，

当$c=l/2$时 $\beta_{max}=\frac{2\Delta I}{I}\frac{a}{l}$，于是

$$P_{lj}=\frac{\pi^2EI}{l^2}\left(1-\frac{2\Delta I}{I}\frac{a}{l}\right)$$

当$c=0$（缺口在杆端）且$a\ll l$时，

$$\beta=\frac{\pi^2}{2}\frac{\Delta I}{I}\left(\frac{a}{l}\right)^3。$$



答 10.40 图

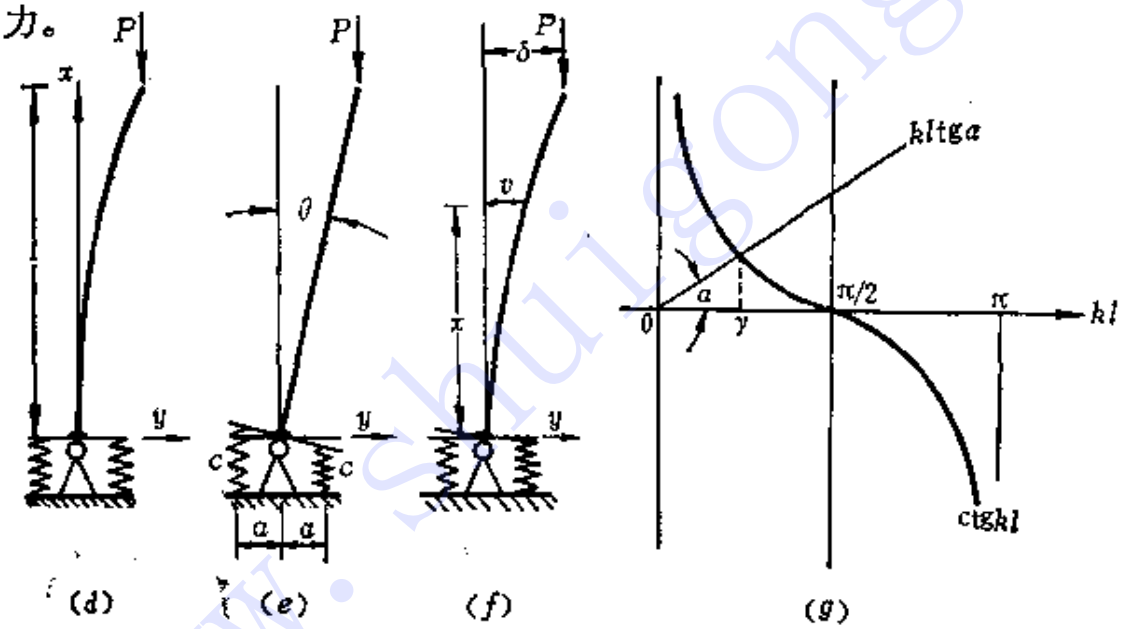
综上所述，当$a\ll l$且$\Delta I/I\ll 1$时，$P_{lj}=\pi^2EI/l^2$，并不受切口的影响。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

*10.41　例如可见文献[2]第1版454页或第2版511页，以及文献[22]181—183页或文献[35]655—657页。

*10.47　例如可见文献[24]427—433页。

*10.49　梁柱的应力与纵力 P 之间的非线性关系，使强度校核时采用许用应力法不等价于许用载荷法。压弯组合变形和梁柱的 σ_{max} 与 P 的关系曲线如图 a 和 b，从图 a 可见 σ^0/n 与 P^0/n 是等价的，从图 b 可见由 σ^0/n 所确定的载荷 P' 大于实际的安全载荷 P^0/n，因而偏于危险，所以梁柱的强度校核要采用许用载荷法。其方法是在非线性的关系中对工作载荷乘以安全系数 n，即用 $\sigma_{max}(nP, nq)\leqslant\sigma^0$ 进行强度核算。这里 σ^0 表示材料的危险应力，P^c 表示对应于 σ^0 的危险载荷，σ_0 表示横力 q 单独作用时所产生的最大应力。



答 10.49 图

*10.51　一般认为，低碳钢的许用正应力比许用剪应力大8成左右，而圆管扭转时最大正应力与最大剪应力是相等的。因此，若认为最大正应力达到许用正应力时才发生失稳，则它的最大剪应力早已超过许用剪应力而强度不够了。显然，要加以强调的不是这种强度失效以后的失稳，而应是强度失效以前或同时出现的失稳。若最大剪应力小于或等于许用剪应力时出现失稳，就

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

不宜从强度上判断是否安全，而从稳定性角度看它已不能正常工作，所以要注意不能把管的壁厚取得太薄。对于题中所给尺寸比例的低碳钢长圆管，利用文献[37]中关于长圆管扭转时的临界剪应力公式

$$\tau_{cr}=\frac{E}{3\sqrt{2}(1-\mu^2)^{3/4}}\left(\frac{t}{r}\right)^{3/2}$$

亦可算出临界剪应力的数值与通常的许用剪应力接近，而比通常的许用正应力要小。上式中 E 和 μ 分别为弹性模量和泊松比，t 和 r 分别为管的壁厚和平均半径。

第十一章　动载和疲劳

*11.6　若把轮缘看作薄壁圆环，从强度和防止松脱的要求，可得最大的容许转速分别如下：

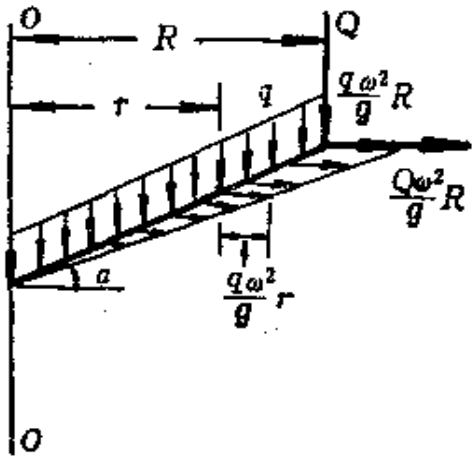
$$\left(\frac{4g[\sigma]}{\gamma D^2}\right)^{1/2}\text{和}\left(\frac{4gE\Delta}{\gamma D^3}\right)^{1/2}$$

其中 γ 为材料的重度，g 为重力加速度，E 为弹性模量，Δ 为过盈量。如果加大轮缘横截面积时保持轮缘的平均直径 D 不变，则容许转速不变；如果使 D 增大，则反而使容许转速降低，即更易破裂和松脱。

*11.7　斜杆受力如图，可得

$$N_{max}=-(Q+ql)\sin\alpha+\left(Q+\frac{ql}{2}\right)\frac{\omega^2 l}{g}\cos^2\alpha$$

$$M_{max}=\left(Q+\frac{ql}{2}\right)l\cos\alpha+\left(Q+\frac{ql}{3}\right)\frac{\omega^2 l^2}{2g}\sin 2\alpha$$



答 11.7 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

11.8 可加强曲杆的中间部分或在两重物 Q 之间用杆子连接起来。

11.13 对于图 b 的情况，由 $Q\Delta_d^2/2\Delta_j=\frac{Qv^2}{2g}-Q\Delta_d$ 得 $K_d=\sqrt{1+\frac{v^2}{g\Delta_j}}-1$。所以三者的冲击应力 $\sigma_a>\sigma_c>\sigma_b$。

*11.15 首先考虑惯性效应引起的动应力，可从牛顿第二定律得出系统的加速度为 $a=(W_1-W_2)g/(W_1+W_2)$。设绳的截面积为 A 而不计它的质量，W_2 加速上升，惯性在绳内引起的动应力为

$$\sigma_{d_2}=\frac{1}{A}\left[W_2+\frac{W_2}{g}a\right]=K_{d_2}\sigma_{j_2},\quad 其中\sigma_{j_2}=\frac{W_2}{A},\quad K_{d_2}=\frac{2}{1+\frac{W_2}{W_1}}>1;$$

W_1 加速下降时，惯性使原有的静应力 $\sigma_{j_1}=W_1/A$ 减小，

$$\sigma_{d_1}=K_{d_1}\sigma_{j_1},\ 其中\ K_{d_1}=\frac{2}{1+\frac{W_1}{W}}<1$$

当 W_2 升到顶部被滑轮卡死时，是受到冲击作用。不考虑摩擦影响。设滑轮半径为 r，绳长为 l、弹性模量为 E，而 W_1 从滑轮边缘由静止开始下落，到 W_2 被卡死时 W_1 的速度为 $v_1^2=2a(l-\pi r)$。将其代入惯性冲击的动载系数公式

$$K_{d_3}=1+\sqrt{\frac{v_1^2}{g\Delta_j}},\ 其中\Delta_j=\frac{W_1 l}{EA}$$

可得

$$K_{d_3}=1+\sqrt{\frac{EA}{W_1}\frac{2(\beta-1)(l-\pi r)}{(\beta+1)l}},\ 其中\ \beta=\frac{W_1}{W_2}>1$$

当 $l\gg\pi r$，且 $\beta=2$ 时，有 $K_{d_1}=0.67$，$K_{d_2}=1.33$，$K_{d_3}=1+\left(\frac{2EA}{3W_1}\right)^{1/2}$。不难看出，$K_{d_3}<K_{d_2}$。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

11.16 （3）例如可见文献〔18〕第2版 下册122—123页，文献〔30〕下册345—346页或文献〔32〕下册361—363页。

11.19 (b) $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_j}}$，其中 $\Delta_j = \frac{Q}{C}$ $\sin\alpha$。

11.22 静应力 $a>c>b>d$，动应力 $a>b>c=d$。

*11.25 固定端处危险，$\sigma_{max} = M/W$，其中 $M = P_d l + 2P\frac{l}{2}$，$P_d = K_d P$，$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_1}}$，$\Delta_1 = \frac{Pl^3}{3EI}$。

11.28 可见文献〔38〕84—85页。

11.35 (a) $m\ddot{v} + cv = 0$；(b) $m\ddot{v} + c(\Delta_1 + v) = mg$，由于 $c\Delta_1 = mg$，所以两者的振动微分方程相同。固有频率也相同，但（b）的最大动应力比（a）的要大。

*11.36 考虑纵向力的影响时两者是不同的，计算模型如图。微分方程分别如下：

$$EIv_1'' = P(l-x) + N(f_1 - v_1)$$

即

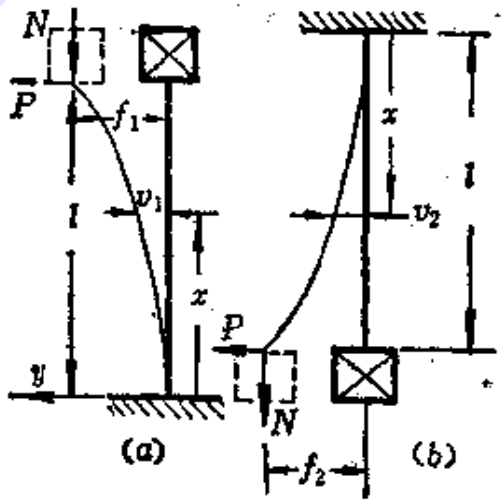
$$v_1'' + k^2 v_1 = \frac{P}{EI}(l-x) + \frac{Nf_1}{EI}$$

$$EIv_2'' = P(l-x) - N(f_2 - v_2)$$

即

$$v_2'' - k^2 v_2 = \frac{P(l-x)}{EI} - \frac{Nf_2}{EI}$$

其中 $k^2 = N/EI = mg/EI$。



答 11.36 图

它们的解分别如下：

$$v_1 = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{P}{N}(l-x) + f_1$$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$v_2 = C_1' \mathrm{ch}kx + C_2' \mathrm{sh}kx - \frac{P}{N}(l-x) + f_2$$

边界条件均为

$x=0$ 处，$v=v'=0$；$x=l$ 处，$v=f_i$，$(i=1, 2)$

分别解出

$$f_1 = P(\mathrm{tg}kl - kl)/kN$$

$$f_2 = P(kl - \mathrm{th}kl)/kN$$

将刚度 $c=P/f$ 代入横向振动频率公式 $\omega=\sqrt{c/m}$，分别得到

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{qk}{\mathrm{tg}kl - kl}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{qk}{kl - \mathrm{th}kl}}$$

设 $l=0.5\mathrm{m}$，$EI=2.67\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2$，$m=2\mathrm{kg}$，有 $\omega_1=2.881/\mathrm{s}$，$\omega_2=7.441/\mathrm{s}$，可见纵向拉力使频率升高。

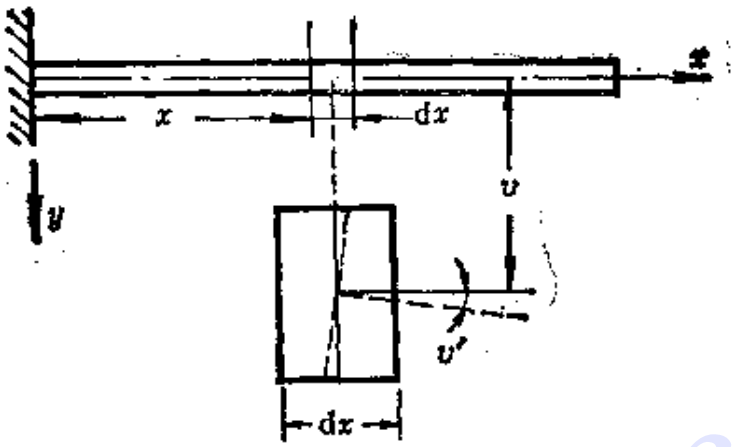
11.38 $\omega=\frac{l}{a}\sqrt{\frac{cg}{Q}}$，固有频率从快变慢。

11.39 由 $\omega=\sqrt{g/\Delta_i}$ 可知，当 $\Delta_{1a}=\Delta_{1b}$ 时，亦即当 $mg\left(\frac{r^3}{3EI}+\frac{r^2l}{12EI}\right)=\frac{mgl^3}{48EI}$ 或 $\frac{r}{l}=\frac{1}{3.04}$ 时两种情况的频率相等。若 $r>0.33l$，(a) 的频率较低；$r<0.33l$ 时，则 (b) 的频率较低。

11.40 高价模态的节点多相当于约束多，因而刚度大、频率高。

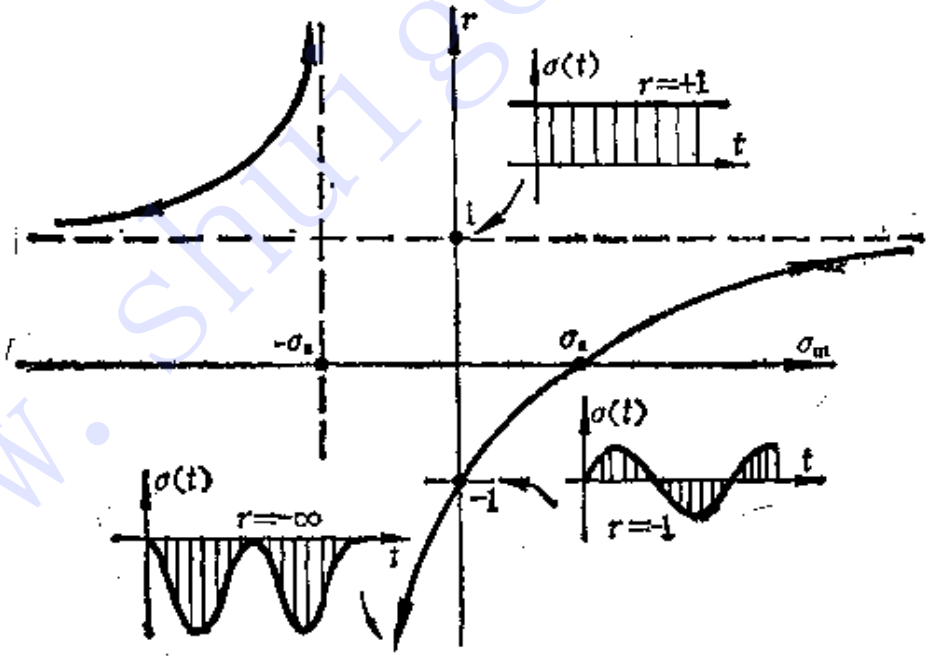
*11.41 除与弯曲挠度 v_M 有关的惯性力 $q_M=\frac{\gamma}{g}A\mathrm{d}x\ddot{v}_M$ 外，还有剪切作用的附加挠度 v_Q 带来的惯性力 $q_Q=\frac{\gamma}{g}A\mathrm{d}x\ddot{v}_Q$，以及梁段 $\mathrm{d}x$ 在 xy 平面内偏转（见图）而引起的转动惯性力矩 $m_M=\mathrm{d}I_M\ddot{v}'_M$。这里 γ 为重度，A 为梁的截面积，$\mathrm{d}I_M$ 为梁段的转动惯量，g 为重力加速度，$\ddot{v}=\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$，$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。后两种惯性力的影响一般可以略去，但对短而高的梁以及高频波有实际意义。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！



答 11.41 图

*11.48 $r=\dfrac{\sigma_{min}-\sigma_a}{\sigma_{min}+\sigma_a}=1-\dfrac{2\sigma_a}{\sigma_{min}+\sigma_a}$，当$\sigma_a$保持定值而$\sigma_{min}$从$-\infty$变化到$+\infty$时，$r$按双曲线变化，如图所示。

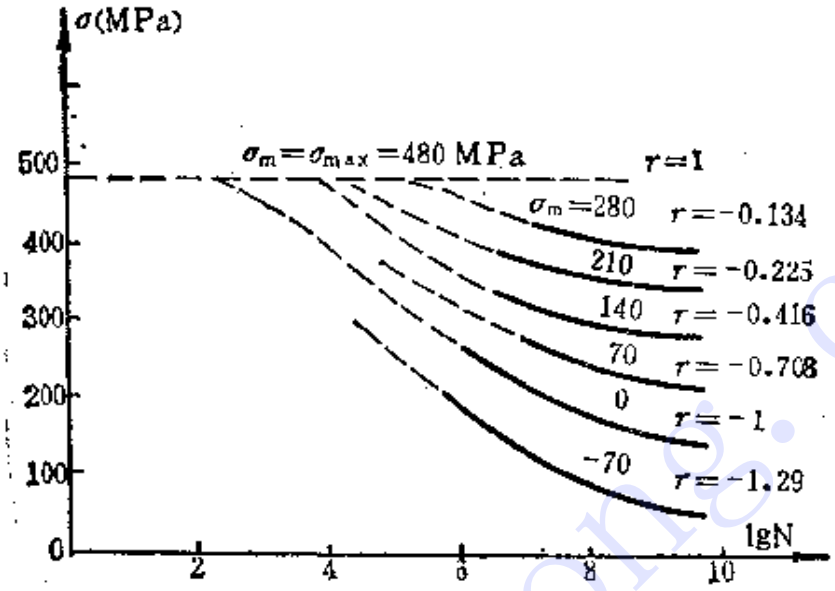


答 11.48 图

11.53 试验表明，当$\sigma_m\geqslant 0$时，以对称循环的持久极限σ_{-1}最低。但当$\sigma_m<0$时，有可能出现低于σ_{-1}的持久极限。以2014-

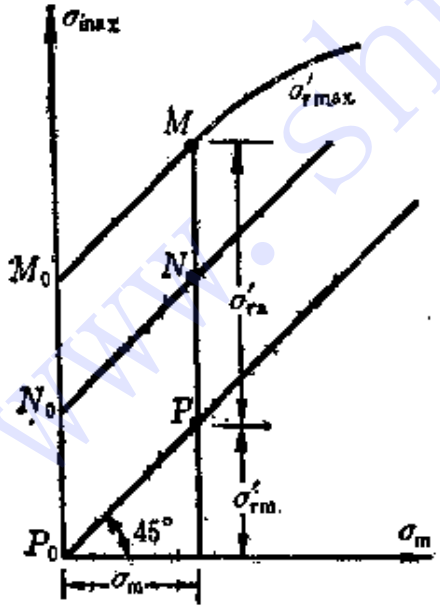
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

T6铝合金为例，在固定 σ_{max} 下不断降低 σ_m 的应力-寿命试验曲线如图，可见当 $\sigma_m=-70$MPa 时，$r=-1.29$，就有 $\sigma_{-1.29}<\sigma_{-1}$。



答 11.53 图

*11.56 一些因素（包括构件几何形状、表面加工质量和环境腐蚀作用所引起的应力集中效应）对于构件持久极限的影响，归结为它们对于构件高应力区中微裂纹扩展的促进作用。脉动的应力幅部分，促使微裂纹尖端从闭合→张开→滑移钝化→停顿→反向滑移→闭合锐化而构成一次次反复的循环，促使微裂纹不断向前扩展。而不随时间改变的平均应力部分则没有这种作用。早期的实验虽未从机理上作出解释，但已定量地验证了上述结论。以应力集中为例，乌日克（Г.В.Ужик）在1949年发表的



答 11.56 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

实验结果表明，对于同一种钢材，有应力集中的试验曲线 σ_{r_1}，与没有应力集中的试验曲线 σ_r，对于不同平均应力 σ_m 的应力幅比值 $\frac{\sigma'_{ra}}{\sigma_{ra}}=\frac{MP}{NP}$（见图），实际上近似为常数（$\approx 2$），与 $\sigma_m=0$ 的对称循环下相应的比值 $\frac{M_0P_0}{N_0P_0}\approx 2$ 基本相同。所以认为应力集中对极限应力幅 σ_{ra} 的影响与对称循环时相同，而与平均应力 σ_{rm} 无关。

*11.61 当构件处于交变的复杂应力状态时，象静载复杂应力状态的强度理论那样，要建立疲劳破坏的强度理论和准则来预估构件破坏的可能性和寿命。当构件所承受的变应力幅度是周期变化甚至是非周期随机变化时（非定常载荷问题），就要研究疲劳损伤的积累和演变规律，或用统计疲劳强度理论进行分析。这些问题是现代强度科学的研究方向之一。对于前者，例如可见文献〔39〕；对于后者，例如可见文献〔2〕第二版§89，文献〔40〕下册§23.11或文献〔41〕下册§15.9。此外，亦可见文献〔42〕第二章。

*11.66 题11.66图中上面一行的设计容易引起疲劳破坏，下面一行是改进方案，其中（a）、（b）采用了压制卸载凹痕或切口、开孔来降低应力集中的影响；（c）是降低增强板的刚度，以便减小主波纹板的应力；（d）把强度较弱的焊缝热影响区从应力集中最严重的角点处移开。

*11.67 如果把两种受力条件孤立地进行分析，则作用次数少而强度大的过载①，会引起同塑性变形有关的应力和变形，因此 σ_s 具有重要意义；而循环作用的歉载则引起疲劳破坏，σ_r 具有更大意义。实际中机械所承受的载荷，往往是由过载和歉载构成的载荷谱，所以车辆、飞机等的强度问题，属于非定常的疲劳

① 所受的交变应力低于材料的持久极限的过程，称为“歉载”，超过其持久极限的过程，称为“过载”。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

问题，其循环特征随时间而变化。在早期的研究中，对过载（$\sigma_{max}>\sigma_{-1}$）用冲击来考虑塑性损伤，而对欠载（$\sigma_{max}<\sigma_{-1}$）则按疲劳强度来校核。实际上，欠载—过载与过载—欠载两种循环的寿命并不相同，现代处理这些问题的方法是在仔细分析载荷谱的基础上，应用统计方法和累积损伤理论进行处理。这是当前的研究课题之一。例如可见文献〔43〕第三册§11.6和文献〔44〕第六章。

第十二章　综合性问题和其他

*12.5　可以通过硬度测量来估计其强度限。用X光照相来判断均匀性。用超声波测定E、μ和各向同性，若波线不垂直于波面就说明材料是各向异性的；若波速不均匀就说明材料是不均匀的。对于各向同性材料，从测得的材料密度ρ和纵波波速c_1、横波波速c_2以及波长λ，就可按下列式子计算弹性模量和泊松比：

$$E=\frac{\rho c_2^2(3c_1^2-4c_2^2)}{c_1^2-c_2^2},\quad \mu=\frac{c_1^2-2c_2^2}{2(c_1^2-c_2^2)}$$

*12.6　可见文献〔2〕§29，文献〔9〕§3.9，文献〔10〕和文献〔45〕§6.2。

*12.13　例如可见文献〔9〕6和11页。

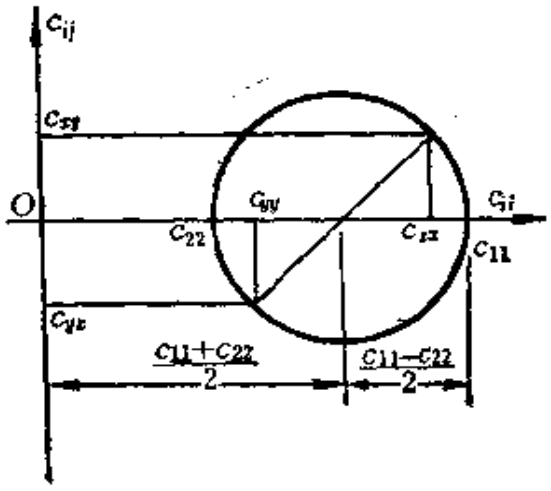
*12.17　注意到

$$F_1=F_x\cos\theta-F_y\sin\theta,$$
$$F_2=F_x\sin\theta+F_y\cos\theta \qquad (a)$$

$$\delta_x=\delta_1\cos\theta+\delta_2\sin\theta,$$
$$\delta_y=\delta_2\cos\theta-\delta_1\sin\theta \qquad (b)$$

其中

$$\delta_1=F_1/k_1,$$
$$\delta_2=F_2/k_2 \qquad (c)$$



答 12.17 图

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

将式（a）代入式（c）再代入式（b）有

$$\delta_x = F_x\left(\frac{\cos^2\theta}{k_1}+\frac{\sin^2\theta}{k_2}\right)-F_y\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{k_1}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{k_2}\right)=c_{xx}F_x+c_{xy}F_y$$

$$\delta_y = F_x\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{k_2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{k_1}\right)+F_y\left(\frac{\cos^2\theta}{k_2}+\frac{\sin^2\theta}{k_1}\right)=c_{yx}F_x+c_{yy}F_y \qquad (d)$$

用矩阵形式把式（d）写成$[\delta]=[c][F]$，其中

$$c_{xx}=0.5(c_{11}+c_{22})+0.5(c_{11}-c_{22})\cos2\theta$$

$$c_{yy}=0.5(c_{11}+c_{22})-0.5(c_{11}-c_{22})\cos2\theta$$

$$c_{xy}=-0.5(c_{11}-c_{22})\sin2\theta$$

由此绘出莫尔圆（柔度圆）如图所示。

*12.18 由$E=2G(1+\mu)$可以导出下面各式：

$$\frac{dE}{E}=\frac{dG}{G}+\frac{\mu}{1+\mu}\frac{d\mu}{\mu},\quad \frac{dG}{G}=\frac{dE}{E}-\frac{\mu}{1+\mu}\frac{d\mu}{\mu},$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{E}{E-2G}\left(\frac{dE}{E}-\frac{dG}{G}\right)$$

由此可以看出，当E、G和μ的实验误差相同时，前两式的误差与实验误差同级，而由E和G来求μ时，则使实验误差增大到E和G的误差之和的三倍以上。弹性范围内μ值一般为0.1～0.5，当μ值较小时实验的难度较大，而且μ值的误差也较大，因为$E/(E-2G)=(1+\mu)/\mu$。

*12.19 除了通过拉伸、压缩试验测量两个方向的线应变等方法以外，也可用测量试件体积变化的方法，例如见题8.16的答案。

*12.23 $N_4=4P$，$N_5=\sqrt{2}P$，$N_6=-5P$。把桁架作为等效悬臂梁时就会看出，所有的上弦杆受拉、下弦杆受压，斜杆

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

受拉并传递等效剪力。可以从自由端挠度相等或总变形能相等，即由

$$f=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_iN_i^0l_i}{E_iA_i}=\frac{P(6a)^3}{3B}$$

$$或U=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i^2l_i}{2E_iA_i}=\int\frac{M_p^2dx}{2B}$$

求出等效弯曲刚度 B，式中 n 为杆的总数。

*12.24 把矢量 m 简化到簧丝横截面上，沿自然坐标系（主法线 n，副法线 b，簧丝中心线 t）进行分解，得到两个弯矩 $M_{nt}=-m\cos\psi\sin\alpha$，$M_{nn}=m\sin\psi$ 和扭矩 $M_{nt}=m\cos\psi\cos\alpha$，这里 ψ 为 n 与 x 轴之间的夹角，可见簧丝为双弯加扭转变形。此时可用单位载荷法求 θ：

$$\theta=\int_0^l\frac{M_{nt}M_{nt}^0}{GI_p}ds+\int_0^l\frac{M_{nb}M_{nb}^0}{EI_b}ds+\int_0^l\frac{M_{nn}M_{nn}^0}{EI_n}ds$$

其中簧丝的总有效长度 $l=\pi Dn/\cos\alpha$，$ds=Dd\psi/2\cos\alpha$，$I_b=I_n=I_p/2=\pi d^4/64$。在小升角时可得出

$$\theta=32mDn(2+\mu)/Ed^4=mH/B$$

$$\therefore\quad B=HEd^4/32Dn(2+\mu)$$

有了等效弯曲刚度 B 之后，把弹簧比拟为压杆，按材料力学知识就可以求出它的临界压力。

*12.26 可见文献[46]。

*12.30 例如可见文献[47]52—55页。

12.31 设正方形边长为 a，由矩形截面杆的正确扭角公式 $\phi=M_nl/GI_n$ 并查表知 $I_n=0.141a^4$。若误将圆杆公式用于方杆，即扭角公式中的 I_n 取 $I_p=I_Y+I_z=2I_z=a^4/6$，则 $G_{误}/G_{正}=I_n/I_p$

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

=84.6%。

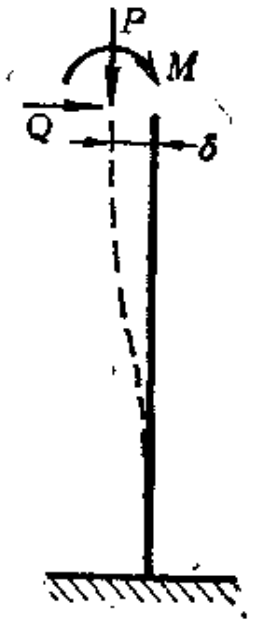
*12.32 如果腹板刚度很小，则两翼缘将在$P/2$的偏心拉力作用下产生相反方向的弯曲，从而使腹板发生扭转变形，所以横截面上正应力不再均匀分布了。当腹板刚度很大时（极限情况变成矩形截面），这种复杂的应力分布只局限于杆端加力附近区域。在端面受扭矩作用时，两翼缘也产生类似的反向弯曲，横截面产生翘曲，其上除了剪应力还有正应力作用。关于薄壁杆件的弯曲和扭转理论，例如可见文献〔2〕第十一章或文献〔28〕第十章。

*12.33 对于图a的情况，腹板的伸长使两翼缘在相反方向受到偏心的拉伸（拉伸加弯曲），而翼缘的弯曲又导致腹板受扭。对于图b的情况，四块翼板同时弯曲，使截面绕中心直线扭转，形成压扭失稳。

*12.36 不同之处在于：应力集中是由于构件几何形状或刚度的突变而引起的，属于固定边界条件问题，危险点往往在构件表面处；接触应力是由于构件间的局部挤压引起的，其接触面积往往随载荷而变化，属于可动边界条件问题，载荷与最大应力之间呈非线性关系，接触疲劳破坏往往起源于表面下的危险点，并出现剥蚀现象。

*12.42 可见文献〔38〕33—34页。

*12.46 簧片的计算模型为梁柱，如图。为了提高测量精度，要求簧片纵向刚硬而横向柔软，使Q尽可能的小。



答 12.46 图

*12.49 示值误差是测定读数值与实际值之差，可用示值精度来表示。示值精度等于读数指示值乘以标定系数。在仪器量程的各个点上，一般讲示值精度并不相同，并且有正有负。示值精度的误差等于示值与标定器给定值之差。采用示值精度法需要参考标

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

定资料（有关论述可见文献[48]）。满量程误差是按仪表最大量程时的绝对误差来标定，比如最大量程100格时误差±1格，精度为±1%，而示值50格时，仍取满量程误差±1格，精度则为±2%。因此，小量程读数的满量程精度较低。材料力学实验中的试验机和电阻应变仪采用示值精度法进行标定，而杠杆引伸计和电工、热工仪表一般采用满量程精度法进行标定。试验机和仪表的精度分级如表所示。

示值精度	A级	B-1级	B-2级	C级	D级	E级
	0.00001	0.0001	0.0002	0.001	0.01	0.1

满量程精度	0.5级	1级	1.5级	2级
	0.005	0.01	0.015	0.02

*12.52 例如可见文献[7]§11.5或文献[43]第二册274—27页。

*12.60 挠曲线只与弹性核有关，在小变形下挠曲线微分方程如下

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{\sigma}{Ey}$$

其中 $y\leqslant y_0$，M 为弹性核所分担的弯矩。当 $y=y_0$ 时，$\sigma=\sigma_s$，由此可将上式改写成

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sigma_s}{Ey_0}=\frac{\sigma_s}{E\frac{h}{2}\sqrt{3\left(1-\frac{m}{m_{jx}}\right)}}$$

*12.64 可参看题3.26的答案。

*12.65 平面假设适用，$\varepsilon=y/\rho$；小位移条件适用，$1/\rho=v''$，所以 $\varepsilon=v''y$，为线性分布。在弹性核内，$y_2<y_0$（见图），$\sigma=E\varepsilon$；在塑性区，$y_1>y_0$，对于理想塑性材料，$\sigma=\sigma_s$，于是弹塑性弯曲时弯矩为

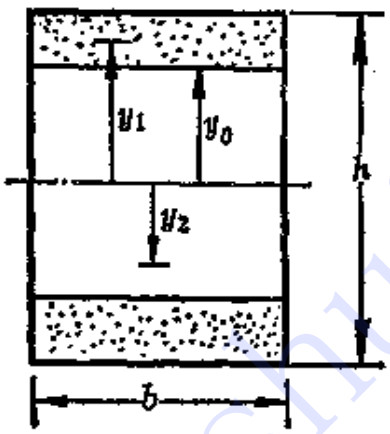
由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

$$M=\sigma_s\int_{A_1}y_1\mathrm{d}A+\int_{A_2}\sigma y_2\mathrm{d}A=\sigma_s\left(S_1+\frac{I_2}{y_0}\right)$$

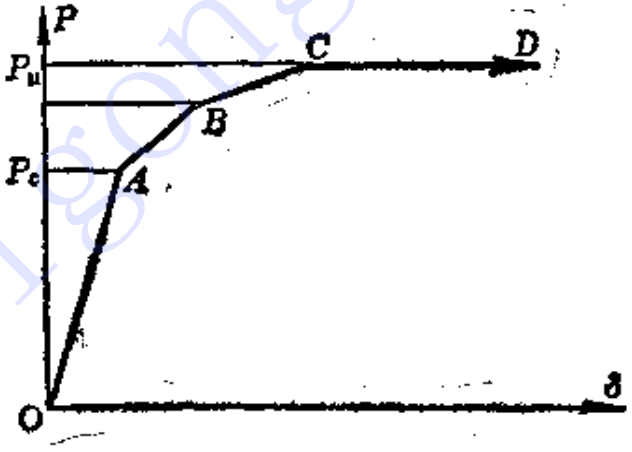
对矩形截面及所给出的弯矩值，有

$$M=\sigma_s b\left(\frac{h^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}\right)=\sigma_s\frac{bh^2}{5}$$

由此得出 $y_0=0.387h$，此处$\varepsilon_0=\varepsilon_s$，由平面假设可得上、下边缘处 $\varepsilon_{max}=1.29\varepsilon_s$。当进入极限状态时，$y_0\to 0$，该处$\varepsilon_0$变为不定值，尽管平面假设仍然成立，但从简单的几何关系已求不出确定的 ε_{max}了。为了确定ε_{max}，要引入强化效应。



答 12.65 图



答 12.70 图

12.66 $W_{jx}=D^3(1-\alpha^3)/6$。

12.70 $P_{jx}=\sigma_s A\ (1+2\cos\alpha+2\cos 2\alpha)$，$P$-$\delta$ 曲线示意如图，OA为弹性阶段，AB 为中间一根杆屈服，BC 为中间三根杆屈服，CD 为极限状态。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

答案和提示所引用的参考文献

〔1〕贾有权等，材料力学实验，人民教育出版社（1964）；高等教育出版社（1984）。

〔2〕B.M，费奥多谢夫，材料力学，高等教育出版社（1965；1985）。

〔3〕老亮、解全陛、宋先邨，也谈材料压缩时的破坏形式，力学与实践，6(1985)。

〔4〕S.铁摩辛柯，材料力学（高等理论及问题），科学出版社（1964）。

〔5〕Я.Б.弗里德曼，金属机械性能，第二册，机械工业出版社（1982）。

〔6〕范钦珊，工程力学习题指导，中册（材料力学），中国建筑工业出版社（1981）。

〔7〕西田正孝，材料力学——附光弹性说明，高等教育出版社（1985）。

〔8〕陈文淼、陈化，密圈螺旋弹簧的变形分析，力学与实践，6（1984）。

〔9〕周之桢，材料力学，第一册，国防科技大学出版社（1987）。

〔10〕老亮，关于平面假设的讲授方法的一点浅见，力学与实践，2（1987）。

〔11〕钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，弹性柱体的扭转理论，科学出版社（1956）。

〔12〕老亮，矩形截面扭杆应力分布图之正误，力学与实践，3(1981)；4（1981）78页（更正）。

〔13〕渥美光等，材料力学，人民教育出版社（1981）。

〔14〕A.Higdon等，材料力学，高等教育出版社（1985）。

〔15〕E.P.波波夫，固体力学引论，人民邮电出版社（1985）。

〔16〕蒋智翔，材料力学，上册，清华大学出版社（1985）。

〔17〕二向应力状态最大主应力方向的判别，力学与实践，2

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

(1984)。

〔18〕刘鸿文等，材料力学，高等教育出版社，上册（1979，1982），下册（1979，1983）。

〔19〕Г.С.皮萨林科等，复杂应力状态下的材料变形与强度，科学出版社（1983）。

〔20〕理化检验——物理分册，1（1985）。

〔21〕黎邦隆、老亮，力学（报考理工科研究生复习指导丛书），湖南科学技术出版社（1985）。

〔22〕陈森、杜耀星，材料力学答疑，福建科学技术出版社（1986）。

〔23〕饶沛隆、段神尧，材料力学（工科研究生试题与解答），天津科学技术出版社（1983）。

〔24〕S.铁摩辛柯等，材料力学，科学出版社（1978）。

〔25〕单辉祖等，材料力学，国防工业出版社，上册（1981，1986），下册（1981）。

〔26〕方汝琦，对分析剪心的一点讨论，力学与实践，2（1986）。

〔27〕胡增强，材料力学习题解析，中国农业机械出版社（1983）。

〔28〕刘鸿文等，高等材料力学，高等教育出版社（1985）。

〔29〕孙训方、方孝淑、关来泰，材料力学，上、下册，高等教育出版社（1979）。

〔30〕孙训方、方孝淑、陆耀洪，材料力学，人民（高等）教育出版社，上册（1964），下册（1965）。

〔31〕粟一凡等，材料力学(第二版)，高等教育出版社，上册(1983)，下册（1984）。

〔32〕吴永生、王魏钒，材料力学，上、下册，高等教育出版社（1983）。

〔33〕王道敏，关于截面核心的讨论，力学与实践，4（1986）。

〔34〕梁炳文、胡士光，弹塑性稳定理论，国防工业出版社（1983）。

〔35〕何祥铁、彭绍佩、宋福磐、程根吾、夏时行，1980—1985全国招考研究生力学试题选解，湖南科学技术出版社（1986）。

〔36〕В.И.费多谢夫，材料力学习题选集，高等教育出版社（1954）。

由www.shuigong.com 水利工程网网友制作，仅供参考，请勿转载作为盈利用途！

243245

〔37〕S.铁摩辛柯，弹性稳定理论，科学出版社（1958），S.P.铁摩辛柯、J.M.盖莱，弹性稳定理论，科学出版社（1965）。

〔38〕J.E.戈登，强韧材料的科学，科学出版社（1982）。

〔39〕程沅生，多轴应力疲劳关系的基本准则，力学与实践，3（1984）。

〔40〕杜庆华等，材料力学，高等教育出版社，上册（1957），下册（1958）。

〔41〕苏翼林等，材料力学，人民教育出版社，上册（1979），下册（1980）。

〔42〕T.V.达根等，疲劳设计准则，国防工业出版社（1982）。

〔43〕周明潘、薛鸿达，材料力学，第二、三册，中国人民解放军军事工程学院（1960）。

〔44〕C.B.谢联先，机械零件的承载能力和强度计算，机械工业出版社（1984）。

〔45〕H.Crandall等，固体力学导论，人民教育出版社（1980）。

〔46〕沈坤元、王征颖、薛元德，玻璃钢撑竿设计中的几点力学考虑，力学与实践，6（1983）。

〔47〕张如一、陆耀桢等，实验应力分析，机械工业出版社（1981）。

〔48〕关天顺，万能量具精度分析与计算，机械工业出版社（1982）。

〔49〕陈篪等，金属断裂研究文集，冶金工业出版社（1978）。

〔50〕剡鸿甲，关于压杆临界应力经验公式的小议，力学与实践，4（1987）。